AULA 19 E 20
Análise de Regressão Múltipla: Problemas Adicionais

Ernesto F. L. Amaral

19 e 24 de maio de 2011
Avaliação de Políticas Públicas (DCP 046)

Fonte:
Wooldridge, Jeffrey M. “Introdução à econometria: uma abordagem moderna”. São Paulo: Cengage Learning, 2008. Capítulo 6 (pp.174-206).

EFEITOS DA DIMENSÃO DOS DADOS NAS ESTATÍSTICAS

– Mudanças das unidades de medida das variáveis não afeta o R^2.

– A intenção agora é de examinar o efeito do redimensionamento das variáveis dependente ou independente sobre:

  – Erros-padrão.

  – Estatísticas *t*.

  – Estatísticas *F*.

  – Intervalos de confiança.

– Escolhendo as unidades de medida, a aparência da equação estimada pode melhorar, sem alterar a essência do modelo.

– É geralmente realizada com valores monetários, especialmente quando os montantes são muito grandes.

EXEMPLO

– *pesônas*: peso dos recém-nascidos, em onças.

– *cigs*: número médio de cigarros que a mãe fumou por dia durante a gravidez.

– *rendfam*: renda anual familiar, em milhares de dólares.

– Equação 1:

$$\widehat{pesonas} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 cigs + \hat{\beta}_2 rendfam$$

EFEITOS DA DIMENSÃO DOS DADOS

Variável Dependente	(1) pesonas	(2) pesonaslb = pesonas/16	(3) pesonas
Variáveis Independentes			
cigs	-0,4634 (0,0916)	-0,0289 (0,0057)	-----
maços = cigs/20	-----	-----	-9,268 (1,832)
rendfam	0,0927 (0,0292)	0,0058 (0,0018)	0,0927 (0,0292)
intercepto	116,974 (1,049)	7,3109 (0,0656)	116,974 (1,049)
Observações	1.388	1.388	1.388
R-quadrado	0,0298	0,0298	0,0298
SQR	557.485,51	2.177,6778	557.485,51
EPR	20,063	1,2539	20,063

MUDANÇA NA DEPENDENTE

– Não importa como a variável dependente seja medida, os efeitos da constante e coeficientes são transformados nas mesmas unidades.

– Equação 2:

$$\widehat{pesonas}/16 = \hat{\beta}_0/16 + \left(\hat{\beta}_1/16\right)cigs + \left(\hat{\beta}_2/16\right)rendfam$$

E A SIGNIFICÂNCIA ESTATÍSTICA?

– A alteração da variável dependente de onças para libras não tem efeito sobre o quanto são estatisticamente importantes as variáveis independentes.

– Os erros-padrão na coluna (2) são 16 vezes menores que os da coluna (1).

– As estatísticas *t* na coluna (2) são idênticas às da coluna (1).

– Os pontos extremos dos intervalos de confiança na coluna (2) são exatamente os pontos extremos na coluna (1) divididos por 16, já que ICs mudam pelos mesmos fatores dos erros-padrão.

– IC de 95% é beta estimado +/- 1,96 erro padrão estimado.

E O GRAU DE AJUSTE? E O SQR? E O EPR?

– Os R^2 das duas regressões são idênticos, como esperado.

– A soma dos resíduos quadrados (SQR) e o erro-padrão da regressão (EPR) possuem diferentes equações.

– Quando *pesonaslb* é a variável dependente, o resíduo da observação *i* na equação (2) é: $\hat{u}_i/16$

– O resíduo quadrado em (2) é: $(\hat{u}_i/16)^2 = \hat{u}_i^2/256$

– Por isso, **SQR(2) = SQR(1) / 256**.

– Como: $EPR = \hat{\sigma} = \sqrt{SQR/(n-k-1)} = \sqrt{SQR/1.385}$

– Por isso, **EPR(2) = EPR(1) / 16**.

REDUZIMOS O ERRO?

– O erro na equação com *pesonaslb* como a variável dependente tem um desvio-padrão 16 vezes menor do que o desvio-padrão do erro original.

– Isso não significa reduzir o erro por mudar a medida da variável dependente.

– O EPR menor simplesmente reflete uma diferença nas unidades de medida.

MUDANÇA NA INDEPENDENTE

– *maços*: quantidade de maços de cigarros fumados por dia:

maços = cigs / 20

$$\widehat{pesonas} = \hat{\beta}_0 + (20\hat{\beta}_1)\left(\frac{cigs}{20}\right) + \hat{\beta}_2 rendfam$$
$$= \hat{\beta}_0 + (20\hat{\beta}_1)maços + \hat{\beta}_2 rendfam$$

– O intercepto e o coeficiente de inclinação de *rendfam* não se alteraram.

– O coeficiente de *maços* é 20 vezes o de *cigs*.

– O erro-padrão de *maços* é 20 vezes o de *cigs*, o que significa que a estatística *t* é a mesma.

– Se *maços* e *cigs* fossem inseridos conjuntamente, teríamos multicolinearidade perfeita.

COEFICIENTES BETA

– Algumas vezes, uma variável-chave é medida em uma dimensão de difícil interpretação.

– Primeiro exemplo: ao invés de perguntar o efeito sobre o salário, proveniente do aumento em dez pontos em um teste, talvez faça mais sentido perguntar sobre efeito proveniente do aumento de um desvio-padrão.

– Segundo exemplo: é o caso de variáveis criadas com análise fatorial, já que não sabemos exatamente o que a unidade de medida significa.

– Como o desvio-padrão da variável “fatorial” é geralmente próximo de uma unidade, verificamos o efeito na unidade da variável dependente (beta), após a alteração de um desvio-padrão na variável independente.

COEFICIENTES PADRONIZADOS

– Algumas vezes é útil obter resultados de regressão quando todas as variáveis tenham sido padronizadas.

– Uma variável é padronizada pela subtração de sua média e dividindo o resultado por seu desvio-padrão.

– Ou seja, computamos a transformação *z* de cada variável e depois fazemos a regressão usando esses valores *z*.

– Portanto, partimos de:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik} + \hat{u}$$

– Novo beta = beta original * (dp de x / dp de y)

– Intercepto (beta zero) não existe mais:

$$z_y = \hat{b}_1 z_1 + \hat{b}_2 z_2 + \cdots + \hat{b}_k z_k + erro$$

– Para j = 1,...,k, os coeficientes são: $\hat{b}_j = \left(\hat{\sigma}_j / \hat{\sigma}_y\right)\hat{\beta}_j$

INTERPRETANDO COEFICIENTES PADRONIZADOS

– Os coeficientes padronizados são também chamados de coeficientes beta.

– Se x_1 aumentar em um desvio-padrão, então o y predito será alterado em b_1 desvios-padrão.

– Os efeitos não estão sendo medidos em termos das unidades originais de y ou de x_j, mas em unidades de desvios-padrão.

– A dimensão das variáveis independentes passa a ser irrelevante, colocando-as em igualdade.

– Quando cada x_j é padronizado, a comparação das magnitudes dos coeficientes (significância econômica) é mais convincente. Ou seja, a variável com maior coeficiente é a “mais importante”.

– O Stata apresenta os beta padronizados com opção “, beta”.

USO DE FORMAS FUNCIONAIS LOGARÍTMICAS

– O uso de logaritmos das variáveis dependentes ou independentes é o artifício mais comum em econometria para permitir relações não lineares entre a variável explicada e as variáveis explicativas.

$$\widehat{log}(y) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 log(x_1) + \hat{\beta}_2 x_2$$

– β_1 é a elasticidade de y, em relação a x_1:

– Quando x_1 aumenta em 1%, y aumenta em β_1%, mantendo x_2 fixo.

– 100*β_2 é a semi-elasticidade de y, em relação a x_2:

– Quando x_2 aumenta em 1, y aumenta em 100*[exp(β_2)-1], mantendo x_1 fixo.

– No entanto, podemos utilizar 100*β_2, quando temos pequenas mudanças percentuais.

PECULIARIDADES DO USO DE LOGARITMOS

– Com log, ignoramos unidades de medida das variáveis, pois coeficientes de inclinação não variam pelas unidades.

– Quando y>0, os modelos que usam log(y) satisfazem MQO mais do que os modelos que usam o nível original de y.

– Log é útil para variáveis estritamente positivas com grandes valores e distribuição concentrada, tais como: renda, vendas de empresas, população, matrículas, empregados, votação.

– Log estreita amplitude dos valores, tornando estimativas menos sensíveis a observações extremas (*outliers*).

– Variáveis medidas em anos aparecem em forma original.

– Taxas geralmente aparecem em forma original.

– Log não é usado se variável tem valor zero ou negativo.

– Não é válido comparar R^2 entre modelos com y e log(y).

EXEMPLO DE NÃO-LINEARIDADE

– Para cada ano adicional de educação, há um aumento fixo no salário. Esse é o aumento tanto para o primeiro ano de educação quanto para anos mais avançados:

$$salário = \beta_0 + \beta_1 educ + u$$

– Suponha que o aumento percentual no salário é o mesmo, dado um ano a mais de educação formal. Um modelo que gera um efeito percentual constante é dado por:

$$log(salário) = \beta_0 + \beta_1 educ + u$$

– Se $\Delta u = 0$, então:

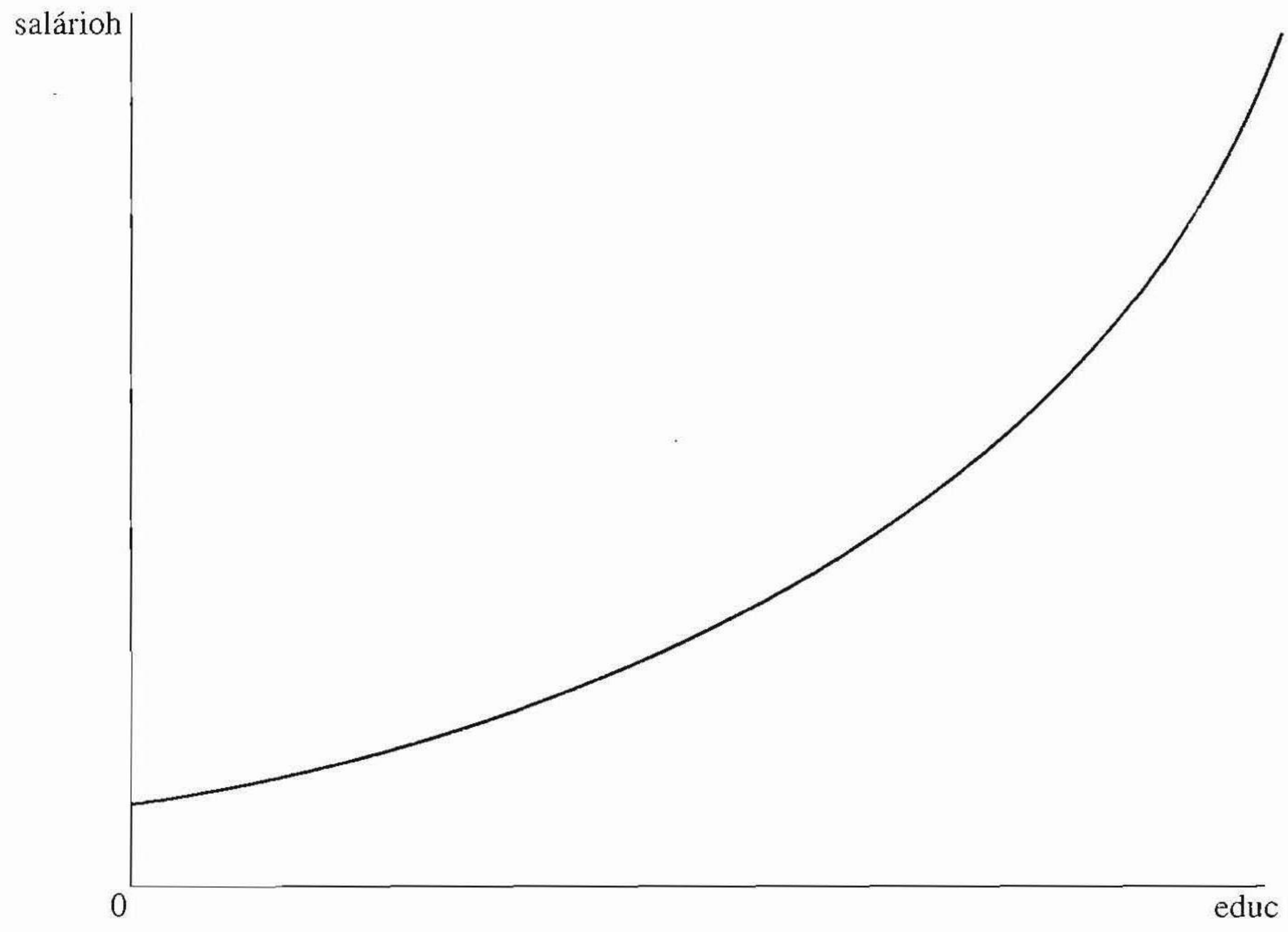
$$\%\Delta salário = (100 * \beta_1)\Delta educ$$

– Para cada ano adicional de educação, há um aumento de ?% sobre o salário.

– Como a variação percentual no salário é a mesma para cada ano adicional de educação, a variação no salário aumenta quando a educação formal aumenta.

Figura 2.6

salárioh $= \exp(\beta_0 + \beta_1 educ)$, *com* $\beta_1 > 0$.



INTERPRETAÇÃO DOS COEFICIENTES

– Aumento de uma unidade em x aumenta y em β_1 unidades:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

– Aumento de 1% em x aumenta y em (β_1/100) unidades:

$$y = \beta_0 + \beta_1 log(x) + u$$

– Aumento de uma unidade em x aumenta y em (100*β_1)%:

$$log(y) = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

– Aumento de 1% em x aumenta y em β_1%:

$$log(y) = \beta_0 + \beta_1 log(x) + u$$

– Este último é o modelo de elasticidade constante.

– Elasticidade é a razão entre o percentual de mudança em uma variável e o percentual de mudança em outra variável.

FORMAS FUNCIONAIS ENVOLVENDO LOGARITMOS

Modelo	Variável Dependente	Variável Independente	Interpretação de β_1
nível-nível	y	x	$\Delta y=\beta_1\Delta x$
nível-log	y	log(x)	$\Delta y=(\beta_1/100)\%\Delta x$
log-nível	log(y)	x	$\%\Delta y=(100\beta_1)\Delta x$
log-log	log(y)	log(x)	$\%\Delta y=\beta_1\%\Delta x$

MODELOS COM FUNÇÕES QUADRÁTICAS

– Funções quadráticas são usadas para capturar efeitos marginais crescentes ou decrescentes.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + u$$

– Sempre existe um valor positivo de *x*, no qual o efeito de *x* sobre *y* é zero, chamado de ponto crítico: $x^* = |\beta_1/(2\beta_2)|$.

– Interpretações: (1) após ponto crítico, a relação se inverte; (2) após/antes ponto crítico, há poucos casos; (3) falta incluir variáveis; ou (4) falta transformar variáveis.

– Quando o coeficiente de *x* é positivo e o coeficiente de x^2 é negativo, a função quadrática tem um formato parabólico (∩):

– Antes desse ponto, *x* tem um efeito positivo sobre *y*.

– Após esse ponto, *x* tem um efeito negativo sobre *y*.

– Se β_1 é negativo e β_2 é positivo, função tem formato U.

MODELOS COM TERMOS DE INTERAÇÃO

– O efeito de uma variável independente, sobre a variável dependente, pode depender de outra variável explicativa:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + u$$

– O efeito parcial de x_2 sobre y é: $\Delta y/\Delta x_2 = \beta_2 + \beta_3 x_1$.

– β_2 é o efeito parcial de x_2 sobre y, quando x_1=0, o que pode não ser de interesse prático.

– Podemos então reparametrizar o modelo, tal como:

$$y = \alpha_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \beta_3 (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) + u, \text{ sendo:}$$

μ_1 e μ_2 médias populacionais de x_1 e x_2.

– δ_2 é o efeito parcial de x_2 sobre y, quando $x_1 = \mu_1$:

$$\delta_2 = \beta_2 + \beta_3 \mu_1$$

– É complicado interpretar modelos com termos de interação.

GRAU DE AJUSTE E SELEÇÃO DE REGRESSORES

– Seleção de variáveis explicativas com base no tamanho do R^2 pode levar a modelos absurdos.

– Nada nas hipóteses do modelo linear clássico exige que o R^2 esteja acima de qualquer valor em particular.

– O R^2 é simplesmente uma estimativa do quanto da variação em *y* é explicado por x_1, x_2, ..., x_k na população.

– Modelos com R^2 pequenos significam que não incluímos fatores importantes, mas não necessariamente significam que fatores em *u* estão correlacionados com os *x's*.

– O tamanho de R^2 não tem influência sobre a média dos resíduos ser igual a zero.

– R^2 pequeno sugere que variância do erro é grande em relação à variância de *y*, mas isso pode ser compensado por amostra grande.

R^2 AJUSTADO

– Sendo σ_y^2 a variância populacional de *y* e σ_u^2 a variância populacional do erro, R^2 da população é a proporção da variação em *y* na população, explicada pelas independentes:

$$R^2 = 1 - \sigma_u^2 / \sigma_y^2$$

– R^2 usual = SQE/SQT = 1 - SQR/SQT = 1 - (SQR/*n*) / (SQT/*n*)

– Podemos substituir o SQR/*n* e SQT/*n*, por termos não-viesados de σ_u^2 e σ_y^2 , e chegamos ao R^2 ajustado:

$$\bar{R}^2 = 1 - [SQR/(n-k-1)] / [SQT/(n-1)] = 1 - \hat{\sigma}^2 / [SQT/(n-1)]$$

$$= 1 - (1 - R^2)(n - 1)/(n - k - 1)$$

– R^2 ajustado não corrige viés de R^2 na estimativa do R^2 da população, mas penaliza inclusão de independentes.

– R^2 ajustado negativo indica adaptação ruim do modelo, relativo ao número de graus de liberdade.

$\bar{R}^2$ NA ESCOLHA DE MODELOS NÃO-ANINHADOS

– O R^2 ajustado auxilia na escolha de modelo sem variáveis independentes redundantes (entre modelos não-aninhados).

– A estatística F (*test*) permite testar somente modelos aninhados.

– No exemplo do World Values Survey, podemos testar se modelo com informação se religião é muito importante (religiao) é melhor do que modelo com crença no céu (ceu):

$$\text{tradrat5} = \beta_0 + \beta_1\text{homem} + \beta_2\text{religiao} + u$$

$$\text{tradrat5} = \beta_0 + \beta_1\text{homem} + \beta_2\text{ceu} + u$$

– Neste caso, não queremos incluir as duas variáveis em conjunto, pois teoricamente medem a mesma dimensão.

– Estes são modelos não-aninhados, exigindo comparação do R^2 ajustado.

$\bar{R}^2$ E MODELOS COM DIFERENTES FORMAS FUNCIONAIS

– Comparação dos R^2 ajustados pode ser feita para optar entre modelos com formas funcionais diferentes das variáveis independentes:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \log(x) + u$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + u$$

– Não podemos usar nem o R^2 nem o R^2 ajustado para escolher entre modelos não-aninhados com diferentes formas funcionais da variável dependente.

– Os R^2 medem a proporção explicada do total da variação de qualquer variável dependente:

  – Portanto, diferentes funções da variável dependente terão diferentes montantes de variação a serem explicados.

CONTROLE DE MUITOS FATORES NA REGRESSÃO

– Estamos preocupados com omissão de fatores importantes que possam estar correlacionados com as variáveis independentes.

– Se enfatizarmos o R^2, tenderemos a controlar fatores em um modelo que não deveriam ser controlados.

– Ao estudar o efeito da qualidade do ensino sobre a renda, talvez não faça sentido controlar os anos de escolaridade, pois subestimará o retorno da qualidade. Podemos estimar a equação com e sem anos de estudo.

– A questão de decidir se devemos ou não controlar certos fatores nem sempre é bem definida.

– Se nos concentrarmos na interpretação *ceteris paribus* da regressão, não incluiremos fatores no modelo, mesmo que estejam correlacionadas com a dependente.

ADIÇÃO DE FATORES: REDUZIR VARIÂNCIA DO ERRO

– A adição de uma nova variável independente pode aumentar o problema da multicolinearidade.

– Porém, ao adicionar uma variável, estamos reduzindo a variância do erro.

– Devemos incluir variáveis independentes que afetem *y* e que sejam não-correlacionadas com todas variáveis independentes, pois:

  – Não induzirá multicolinearidade.

  – Reduzirá variância do erro.

  – Diminuirá erros-padrão dos coeficientes beta, gerando estimativas mais precisas (estimador com menor variância do erro amostral).

VALORES ESTIMADOS E RESÍDUOS

– Encontrados o intercepto e a inclinação, teremos um valor estimado para y para cada observação (x) na amostra:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

– O resíduo é a diferença entre o valor verdadeiro de y_i e seu valor estimado:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

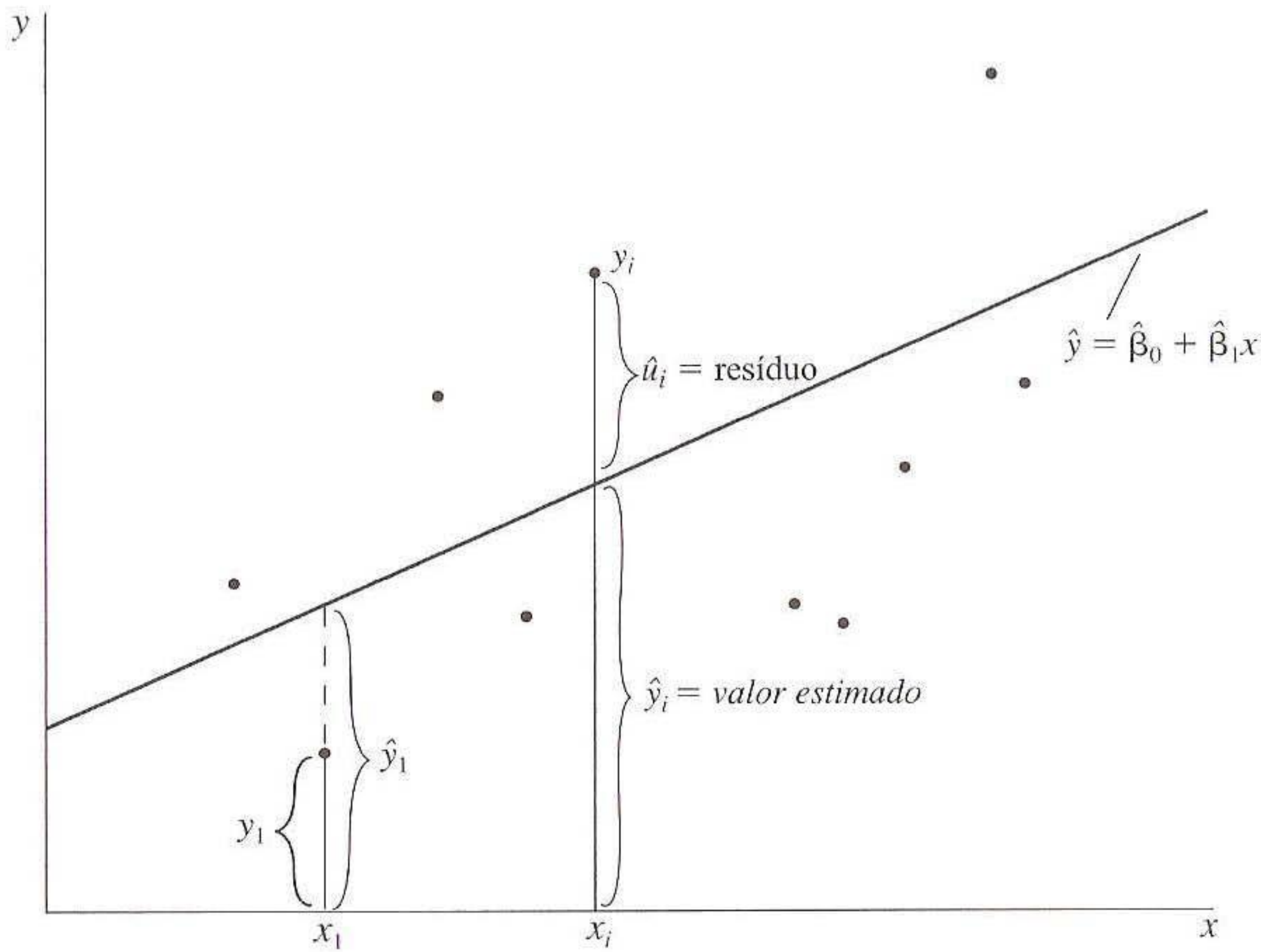
ANÁLISE DE RESÍDUOS

– É importante analisar os resíduos das observações individuais e examinar se valor efetivo da variável dependente está acima ou abaixo do valor previsto:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

– Resíduo mais negativo indica valor observado mais baixo do que o previsto na regressão e vice-versa.

Figura 2.4
Valores estimados e resíduos.



MINIMIZANDO A SOMA DOS RESÍDUOS QUADRADOS

– Suponha que escolhemos o intercepto e a inclinação estimados com o propósito de tornar a soma dos resíduos quadrados:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2$$

– O nome "mínimos quadrados ordinários" é utilizado porque as estimativas do intercepto e da inclinação minimizam a soma dos resíduos quadrados.

– Não é utilizada a minimização dos valores absolutos dos resíduos, porque a teoria estatística para isto seria muito complicada.

HOMOSCEDASTICIDADE DOS RESÍDUOS

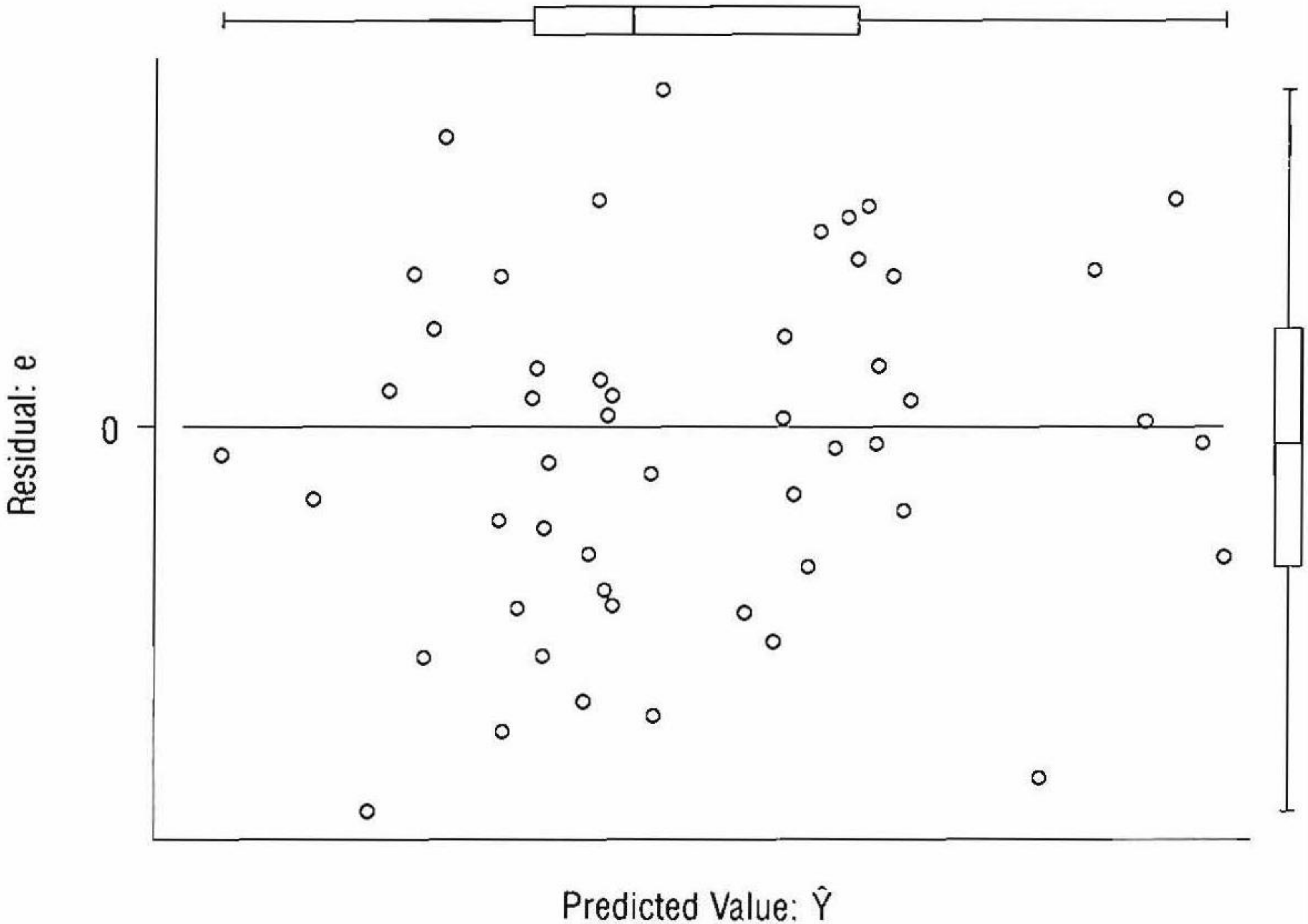


Figure 2.10 "All clear" e-versus-$\hat{Y}$ plot (artificial data).

Fonte: Hamilton, 1992: 52.

HETOROCEDASTICIDADE DOS RESÍDUOS

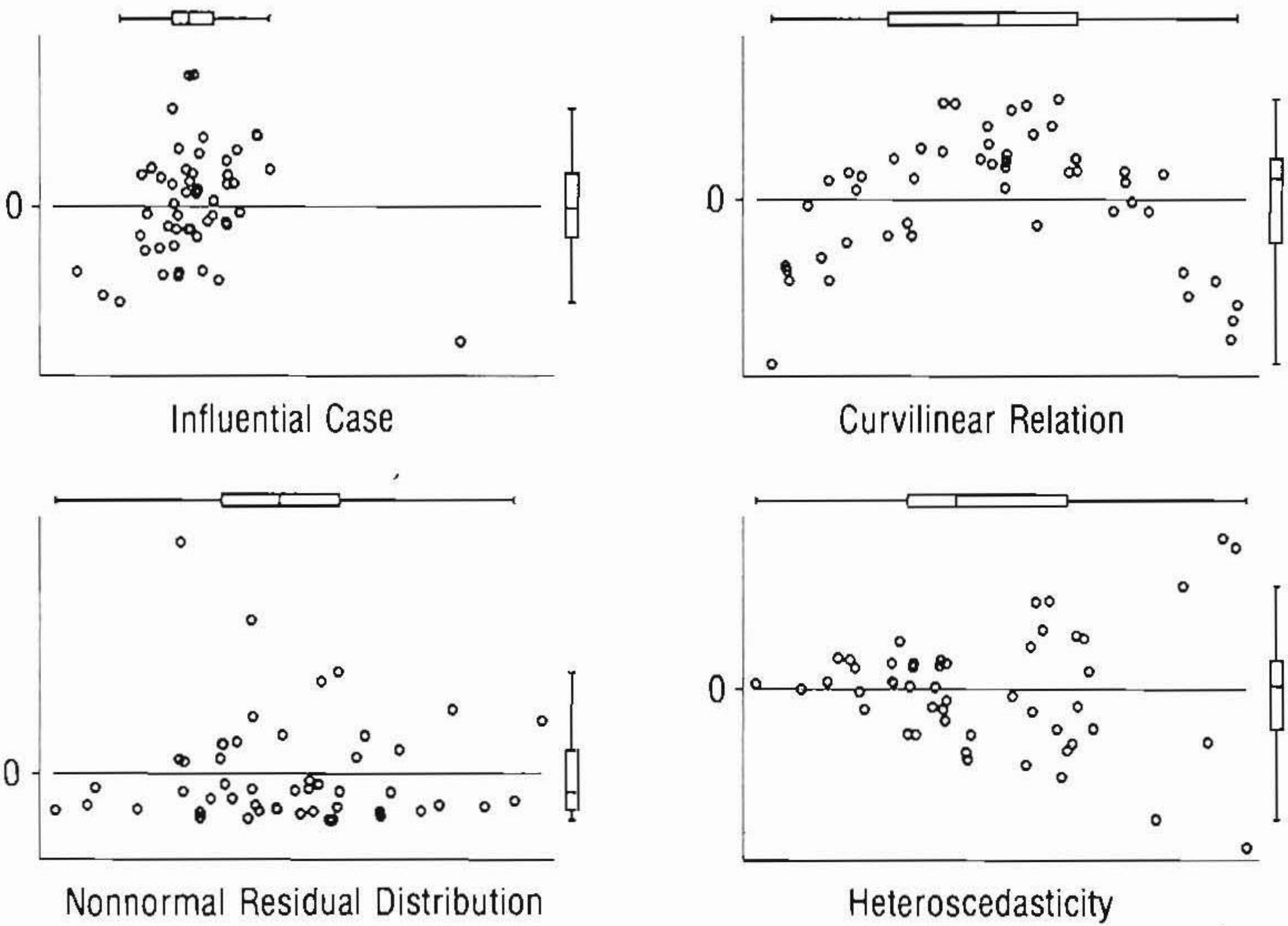


Figure 2.11 Examples of trouble seen in e-versus-$\hat{Y}$ plots (artificial data).

Fonte: Hamilton, 1992: 53.

LEMBRE-SE

– "É muito mais importante tornar-se proficiente em interpretar coeficientes do que eficiente no cálculo de fórmulas." (Wooldridge, 2008: 45)