

# **AULAS 27 E 28**

# **Análise de regressão múltipla com informações qualitativas**

**Ernesto F. L. Amaral**

**26 e 28 de novembro de 2013**  
**Avaliação de Políticas Públicas (DCP 046)**

**Fonte:**

**Wooldridge, Jeffrey M. “Introdução à econometria: uma abordagem moderna”. São Paulo:  
Cengage Learning, 2008. pp.207-242 (capítulo 7).**

# VARIÁVEIS INDEPENDENTES QUALITATIVAS

- No decorrer do curso, já conversamos sobre incorporação de fatores qualitativos nos modelos de regressão.
- Variáveis independentes já foram utilizadas como informações qualitativas e não somente como quantitativas.
- Alguns exemplos foram variáveis de sexo, de opinião e de valores, além de diferentes categorizações de idade e escolaridade.
- As variáveis binárias ou variáveis *dummy* ou variáveis dicotômicas são formas de agregar informações qualitativas em modelos de regressão estatística.

## DEFINIÇÃO DOS VALORES E NOMES

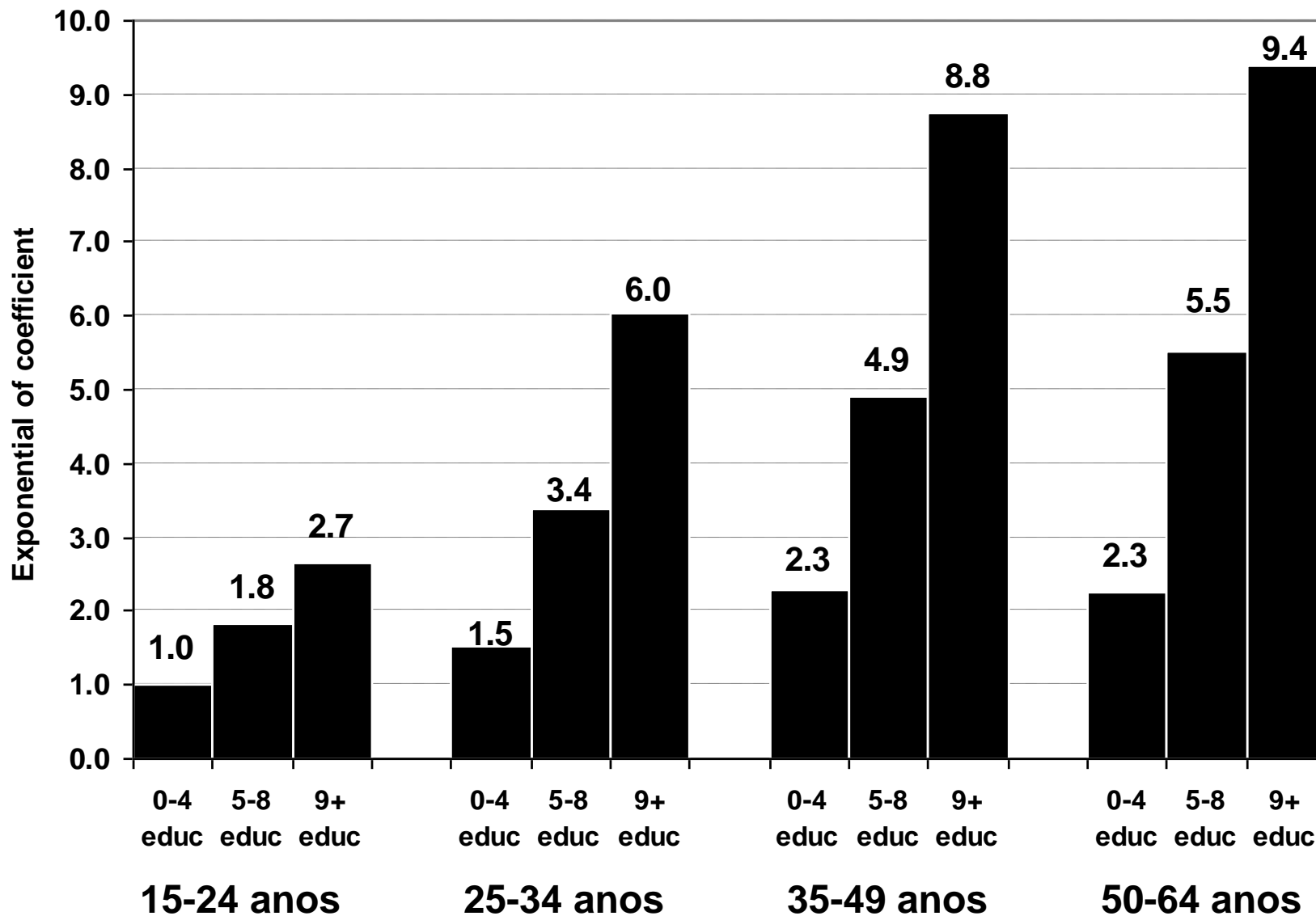
- É preciso definir qual evento será atribuído o valor um e qual será atribuído o valor zero.
- A maneira que denominamos nossas variáveis não tem importância para obter os resultados da regressão, mas ajuda a escolher seus nomes.
- Os valores zero e um são utilizados para facilitar a interpretação dos parâmetros da regressão.
- Outros valores diferentes serviriam para montar a variável, mas dificultaria o entendimento dos betas estimados.

## EXEMPLO DE DADOS DE CORTE TRANSVERSAL

Número da observação	Salário por hora	Sexo			Estado civil		
		Masculino	Feminino	Estado civil (casado)	Estado civil (outros)		
1	3,10	4	0	1	3	0	1
2	3,24	4	0	1	2	1	0
3	3,00	2	1	0	4	0	1
4	6,00	2	1	0	2	1	0
5	5,30	2	1	0	2	1	0
...	...	...	...	...	...	...	...
525	11,56	2	1	0	2	1	0
526	3,50	4	0	1	4	0	1



# EFEITOS DE GRUPOS DE IDADE-ESCOLARIDADE NA RENDA DOS TRABALHADORES: BRASIL, 1970



Fonte: Censos Demográficos Brasileiros 1970 a 2000 (IBGE).

# UMA ÚNICA VARIÁVEL BINÁRIA INDEPENDENTE

- Com somente uma variável dicotômica explicativa, simplesmente adicionamos a variável à equação como uma variável independente:

$$\text{salário} = \beta_0 + \delta_0 \text{feminino} + \beta_1 \text{educação} + u$$

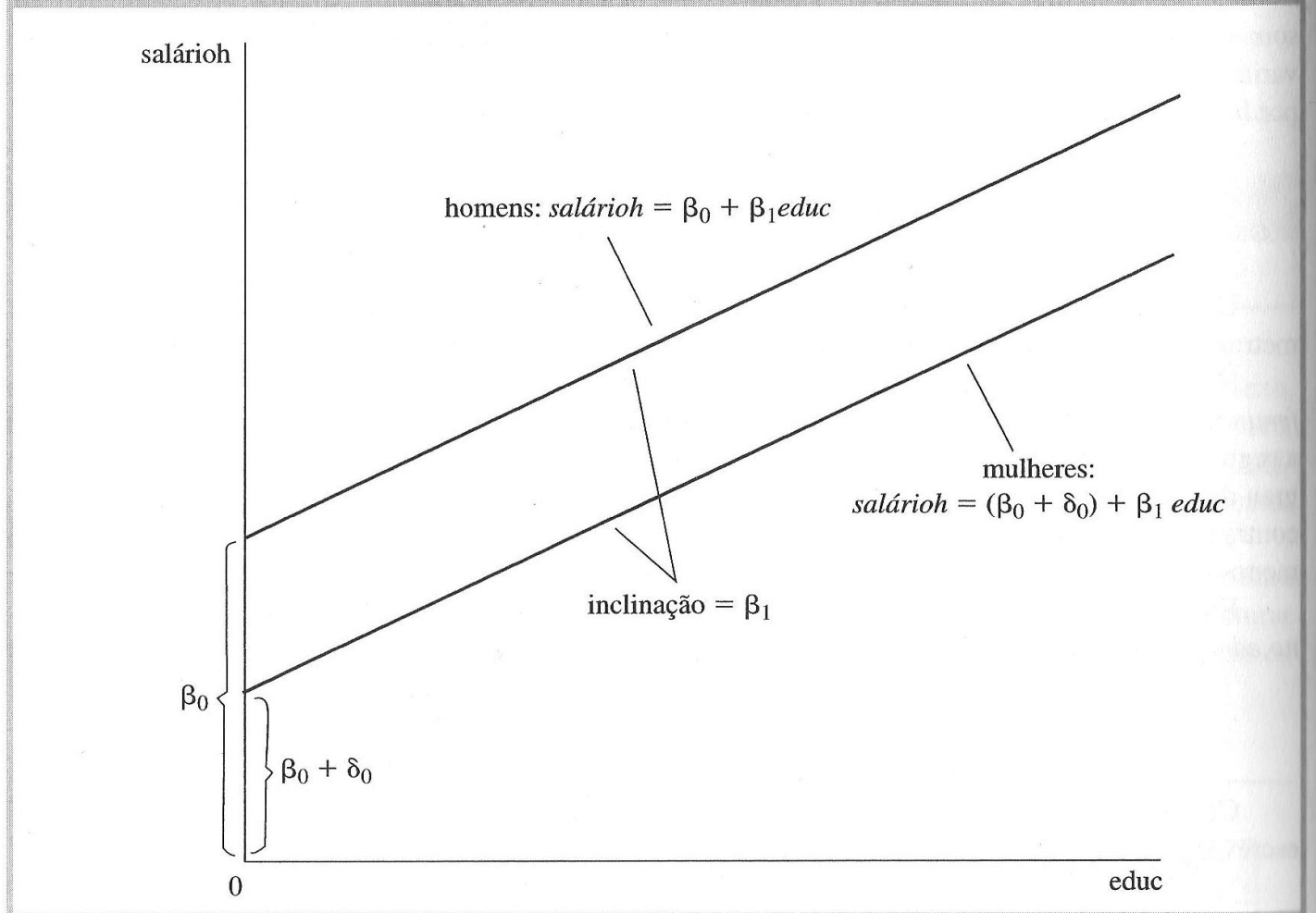
- É utilizado o “ $\delta$ ” para ressaltar que o parâmetro da variável “feminino” é interpretado como informação dicotômica.
- $\delta_0$  é a diferença no salário entre mulheres e homens, dado o mesmo grau de educação e o mesmo termo de erro  $u$ .
- Se  $\delta_0 < 0$ , as mulheres ganham em média menos que os homens, para o mesmo nível dos outros fatores.
- Se  $\delta_0 > 0$ , as mulheres ganham em média mais que os homens, para o mesmo nível dos outros fatores.
- A diferença entre homens e mulheres pode ser descrita graficamente como um **deslocamento de intercepto** entre as linhas que representam cada um dos sexos.

# DESLOCAMENTO DE INTERCEPTO ENTRE SEXOS

- A diferença entre sexos não depende do nível de educação, por isso as retas são paralelas.

Figura 7.1

Gráfico de  $saláριο_h = \beta_0 + \delta_0 feminino + \beta_1 educ$  para  $\delta_0 < 0$ .





## ARMADILHA DA VARIÁVEL *DUMMY*

$$\text{salário} = \beta_0 + \delta_0 \text{feminino} + \beta_1 \text{educação} + u$$

- Na equação acima, o intercepto para homens é  $\beta_0$  e o intercepto para mulheres é  $\beta_0 + \delta_0$ .
- Por isso, seria redundante incluir uma variável binária “masculino”, além da variável “feminino”.
- Como existem apenas dois grupos, são necessários apenas dois interceptos diferentes.
- O uso de duas variáveis binárias introduziria colinearidade perfeita, porque  $\text{feminino} + \text{masculino} = 1$ , o que significa que  $\text{masculino}$  é uma função linear perfeita de  $\text{feminino}$ .
- Os homens foram escolhidos para ser o grupo de referência (ou grupo base), que é o grupo contra o qual as comparações são realizadas:

$$\text{salário} = \alpha_0 + \gamma_0 \text{masculino} + \beta_1 \text{educação} + u$$

$$\alpha_0 + \gamma_0 = \beta_0 \quad \& \quad \alpha_0 = \beta_0 + \delta_0$$

## RETIRADA DO INTERCEPTO GLOBAL

- Também é possível eliminar o intercepto global do modelo:  
$$\text{salário} = \beta_0 \text{ masculino} + \alpha_0 \text{ feminino} + \beta_1 \text{ educação} + u$$
- Essa formulação não oferece uma maneira fácil de verificar diferenças nos interceptos.
- Lembremos que não existe uma maneira consensual de computar o R-quadrado em regressões sem intercepto.
- Por isso, geralmente é sempre incluído um intercepto global para o grupo de referência.

# HIPÓTESE NULA E HIPÓTESE ALTERNATIVA

$$\text{salário} = \beta_0 + \delta_0 \text{feminino} + \beta_1 \text{educação} + u$$

- A hipótese nula de não-existência de diferença entre homens e mulheres será  $H_0: \delta_0 = 0$ .
- A hipótese alternativa de que existe discriminação contra as mulheres será  $H_1: \delta_0 < 0$ .
- Quando algumas variáveis independentes são binárias:
  - Nada muda: (1) na mecânica do MQO; (2) na teoria estatística; e (3) na estatística de  $t$ .
  - A única diferença é a interpretação do coeficiente da variável binária.

# TESTE DE COMPARAÇÃO DE MÉDIAS

- A regressão simples sobre uma constante e uma variável binária é uma maneira objetiva de comparar as médias de dois grupos:

$$\text{salário} = \beta_0 + \delta_0 \text{feminino} + u$$

- $\beta_0$  é o salário médio dos homens na amostra (feminino = 0).
- $\beta_0 + \delta_0$  é o salário médio das mulheres na amostra.
- Para que o teste  $t$  seja válido, é assumida a hipótese de homoscedasticidade, o que significa que a variância populacional dos salários dos homens é a mesma dos salários das mulheres.

# ANÁLISE DE POLÍTICAS PÚBLICAS

- Variáveis binárias independentes refletem características predeterminadas (sexo), escolhas de indivíduos, unidades econômicas ou recebimento de políticas públicas:

$$\text{salário} = \beta_0 + \delta_0 \text{ bolsa família} + \beta_1 \text{ educação} + u$$

- É de se supor que indivíduos com baixa escolaridade tenham maior possibilidade de receber bolsa família.
- Por isso, é importante controlar o modelo por educação, porque gostaríamos de saber o efeito médio sobre salário se escolhermos um indivíduo aleatoriamente e dermos a ele o benefício do bolsa família.
- Na avaliação de políticas públicas, é interessante controlar por outros fatores, com o intuito de verificar se o efeito positivo sobre o salário de receber o bolsa família desaparece, ou se torna significativamente menor.

## GRUPOS DE CONTROLE E DE TRATAMENTO

- Como vimos anteriormente, podemos classificar os indivíduos em grupos de controle (não recebeu a política) e grupo experimental ou de tratamento (recebeu a política).
- No entanto, sabemos que a escolha destes grupos não é realizada aleatoriamente, como é o caso das ciências naturais.
- Efeito causal da política será melhor estimado: (1) ao controlar modelo por uma maior quantidade de fatores; e (2) se beneficiários da política foram definidos aleatoriamente.
- De todo modo, a análise de regressão múltipla pode ser usada para controlar um número suficiente de outros fatores para estimar o efeito causal de uma política pública.

## QUANDO VARIÁVEL DEPENDENTE É LOG(Y)

- Quando a variável dependente aparece na forma logarítmica, com uma ou mais variáveis binárias independentes, os coeficientes têm interpretação percentual.
- Ou seja, quando  $\log(y)$  é a variável dependente em um modelo, o coeficiente de uma variável binária, quando multiplicado por 100, é interpretado como a diferença percentual em  $y$ , mantendo os outros fatores constantes.
- Quando o coeficiente de uma variável binária indica uma grande mudança proporcional em  $y$ , o cálculo da semi-elasticidade indica a diferença percentual exata:

$$100 * [\exp(\beta_1) - 1]$$

# VARIÁVEIS BINÁRIAS PARA CATEGORIAS MÚLTIPLAS

- Podemos utilizar mais de uma variável binária no modelo:

$$\log(\text{salário}) = \beta_0 + \beta_1 \text{feminino} + \beta_2 \text{casado}$$

- No exemplo acima, o prêmio por ser casado é assumido como o mesmo para homens e mulheres.
- Para considerar efeitos diferentes de ser casado por sexo, precisamos comparar quatro grupos: homens casados, mulheres casadas, homens solteiros e mulheres solteiras.
- Digamos que escolhemos homens solteiros como grupo de referência:

$$\log(\text{salário}) = \beta_0 + \beta_1 \text{hcasados} + \beta_2 \text{mcasadas} + \beta_3 \text{msolteiras}$$

- As estimativas das três variáveis binárias medem a diferença proporcional nos salários relativamente aos homens solteiros.
- Como vimos, essa é a mesma idéia de realizar variáveis binárias combinando idade e escolaridade.



# PRINCÍPIO GERAL PARA INCLUSÃO DE BINÁRIAS

- Se o modelo de regressão deve ter interceptos para  $g$  grupos, precisamos incluir  $g - 1$  variáveis binárias e o intercepto.
- O intercepto do grupo de referência é o intercepto global no modelo.
- O coeficiente da variável binária representa a diferença estimada nos interceptos daquele grupo, em relação ao grupo de referência.
- A inclusão de  $g$  variáveis binárias juntamente com um intercepto resultará na armadilha da variável binária (colinearidade perfeita).
- Uma alternativa é incluir  $g$  variáveis binárias e excluir o intercepto global.
- No entanto, isso dificulta a interpretação de diferenças em relação ao grupo base e o  $R^2$  é calculado diferentemente.

# INFORMAÇÕES ORDINAIS COM VARIÁVEIS BINÁRIAS

- As categorias de variáveis ordinais podem ser organizadas em alguma ordem.
- Sabemos que há diferenças relativas entre os valores dos dados, mas não sabemos as magnitudes das diferenças.
- Por exemplo, na escala de frequência “pouco/médio/muito”, é possível ordenar os dados, mas não sabemos se a diferença entre “pouco” e “médio” é a mesma que aquela existente entre “médio” e “muito”.
- Aqui não faz sentido supor que o aumento de uma unidade nessa variável terá um efeito constante sobre outra variável.
- É possível criar três variáveis binárias, tomando uma como referência.
- No caso de variáveis com muitos valores, podemos dividi-la em categorias (escolaridade, por exemplo).
- Classificação pode afetar a significância de outras variáveis.

# INTERAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS BINÁRIAS

- Como vimos no exemplo de estado civil e sexo, podemos realizar interações entre variáveis binárias:

$$\log(\text{salário}) = \beta_0 + \beta_1 \text{ hcasados} + \beta_2 \text{ mcasadas} + \beta_3 \text{ msolteiras}$$

- A equação acima permite testar diretamente diferenças entre qualquer grupo e homens solteiros.
- Podemos adicionar um termo de interação diretamente:
 
$$\log(\text{salário}) = \beta_0 + \beta_1 \text{ feminino} + \beta_2 \text{ casado} + \beta_3 \text{ fem}^* \text{ casado}$$
- Os coeficientes de cada grupo serão:
  - Homens solteiros:  $\beta_0$
  - Homens casados:  $\beta_0 + \beta_2$
  - Mulheres solteiras:  $\beta_0 + \beta_1$
  - Mulheres casadas:  $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$
- Nessa equação,  $\beta_3$  permite testar diretamente se diferencial de sexo depende do estado civil e vice-versa.

## INCLINAÇÕES DIFERENTES

- Existem casos de interação de variáveis binárias com variáveis explicativas que não são binárias para permitir diferença nas inclinações.
- Podemos testar se retorno da educação é o mesmo para homens e mulheres, considerando um diferencial de salários constante entre homens e mulheres:

$$\log(\text{salário}) = (\beta_0 + \delta_0 \text{feminino}) + (\beta_1 + \delta_1 \text{feminino}) * \text{educ} + u$$

- Homens: intercepto ( $\beta_0$ ) e inclinação ( $\beta_1$ )
- Mulheres: intercepto ( $\beta_0 + \delta_0$ ) e inclinação ( $\beta_1 + \delta_1$ )
- $\delta_0$ : diferença nos interceptos entre mulheres e homens.
- $\delta_1$ : diferença no retorno da educação entre sexos.

- No Stata:

$$\log(\text{salário}) = \beta_0 + \delta_0 \text{feminino} + \beta_1 \text{educ} + \delta_1 \text{fem} * \text{educ} + u$$

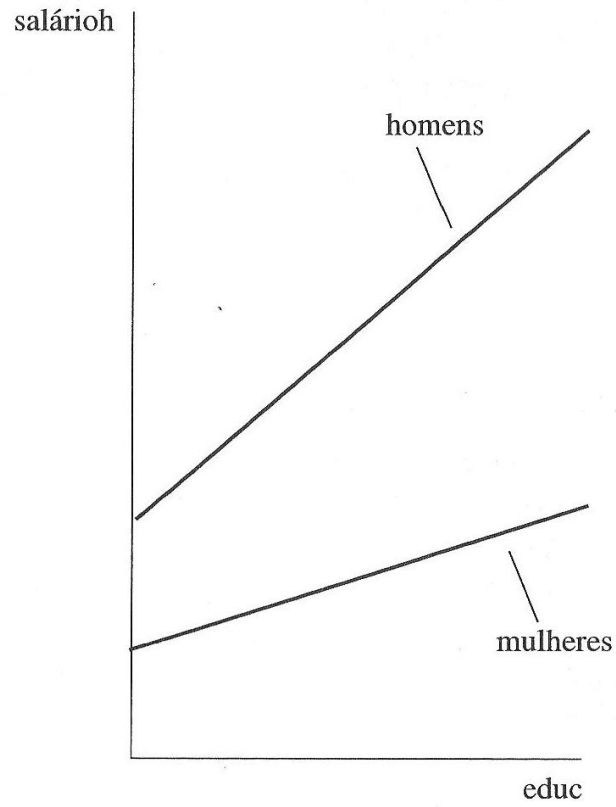
- Quando  $\delta_0 + (\delta_1 * \text{educ}) = 0$ , salário é igual entre sexos.

**GRÁFICO A:** intercepto e inclinação das mulheres é inferior.

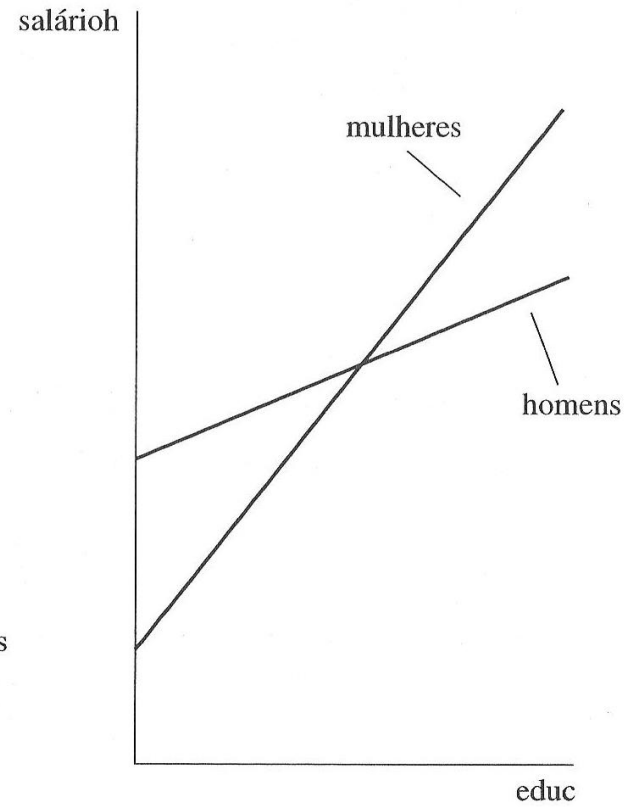
**GRÁFICO B:** intercepto das mulheres é inferior, mas inclinação é superior.

Figura 7.2

Gráficos da equação (7.16). (a)  $\delta_0 < 0, \delta_1 < 0$ ; (b)  $\delta_0 < 0, \delta_1 > 0$ .



(a)



(b)

## REGRESSÕES ENTRE GRUPOS

– De uma forma geral, as interações permitem verificar se a relação (inclinação) entre uma variável independente e uma dependente é diferente para grupos distintos.

– Suponha que temos o seguinte modelo:

$$\text{salário} = \beta_0 + \beta_1 \text{ idade} + \beta_2 \text{ educ} + u$$

– Testar se qualquer uma das interações depende de sexo:

$$\begin{aligned} \text{salário} = & \beta_0 + \delta_0 \text{ feminino} + \beta_1 \text{ idade} + \delta_1 \text{ feminino} * \text{idade} + \\ & + \beta_2 \text{ educ} + \delta_2 \text{ feminino} * \text{educ} + u \end{aligned}$$

–  $\delta_0$ : diferença nos interceptos entre mulheres e homens.

–  $\delta_1$ : diferença de inclinação em relação à idade entre mulheres e homens.

–  $\delta_2$ : diferença de inclinação em relação à escolaridade entre mulheres e homens.

$$H_0: \delta_0 = 0, \delta_1 = 0, \delta_2 = 0$$

## DIFERENÇA ENTRE GRUPOS

- Para testar a hipótese nula:

$$H_0: \delta_0 = 0, \delta_1 = 0, \delta_2 = 0,$$

devemos estimar um modelo restrito (sem “feminino” e interações) e compará-lo ao modelo com interações, a partir da estatística F ou  $R^2$  ajustado (modelos aninhados).

- Pode ser que o teste indique que devemos rejeitar a hipótese nula, mesmo que coeficientes de interação não sejam estatisticamente significantes individualmente.

- Este é nosso modelo:

$$\begin{aligned} \text{salário} = & \beta_0 + \delta_0 \text{feminino} + \beta_1 \text{idade} + \delta_1 \text{feminino} * \text{idade} + \\ & + \beta_2 \text{educ} + \delta_2 \text{feminino} * \text{educ} + u \end{aligned}$$

- A diferença entre homens e mulheres é dada por:

$$\delta_0 + \delta_1 \text{idade} + \delta_2 \text{educ},$$

considerando valores específicos para idade e escolaridade.

## MODELO COM MUITAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES

- Com poucas variáveis independentes, é fácil adicionar todas interações para testar diferenças entre grupos.
- Se tivéssemos muitas variáveis independentes, seria difícil a inclusão de muitas interações com “feminino”.
- Podemos utilizar a soma dos resíduos quadrados da estatística F para estimar esta diferença (Estatística de Chow: fórmula na página 229).
- Ou podemos usar a opção “i” em conjunto com interações:  
xi: reg salario i.fem\*i.idade i.fem\*i.educ i.fem\*i.raça



# VARIÁVEL DEPENDENTE BINÁRIA

- Podemos usar uma regressão múltipla para explicar uma variável dependente binária, com valores zero ou um.
- Como  $y$  pode assumir somente dois valores,  $\beta_j$  não pode ser interpretado como a mudança em  $y$  devido ao aumento de uma unidade em  $x_j$ , mantendo fixos todos os outros fatores.
- Quando  $y$  é uma variável binária, assumindo valores zero e um, a probabilidade de sucesso (probabilidade de  $y$  ser igual a 1) é a mesma do valor esperado de  $y$ :

$$p(\mathbf{x}) = P(y=1|\mathbf{x}) = E(y|\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k,$$

onde  $\mathbf{x}$  representa todas variáveis explicativas.

- $P(y=1|\mathbf{x})$  é uma função linear de  $x_j$  e é chamada de **probabilidade de resposta**.
- O modelo de regressão linear múltipla com uma variável dependente binária é chamado de **modelo de probabilidade linear (MPL)**, porque a probabilidade de resposta é linear nos parâmetros  $\beta_j$ .

# INTERPRETAÇÃO DOS COEFICIENTES ESTIMADOS

- O  $\beta_0$  estimado é a probabilidade de sucesso prevista quando cada  $x_j$  é definido como zero.
- O coeficiente de inclinação ( $\beta_1$ ) estimado mede a mudança prevista na probabilidade de sucesso de  $y$ , quando  $x_1$  aumenta em uma unidade, mantendo fixos os outros fatores.
- Para interpretarmos corretamente um modelo de probabilidade linear, precisamos saber o que constitui um “sucesso”.
- É uma boa idéia dar à variável dependente um nome que descreva o evento  $y = 1$ :
  - Participação na força de trabalho (partrab).
  - Concluiu ensino médio (ensmed).
  - Recebeu política pública (polpub).
  - Eleito das últimas eleições (eleito).
  - Praticou aborto (aborto).

## EXEMPLO DE MODELO DE PROBABILIDADE LINEAR

- Suponha um modelo que explique a probabilidade de estar na força de trabalho ( $naft = 1$ ):

$$naft = 0,586 + 0,038 educ + 0,039 exper - 0,0006 exper^2 + \dots$$

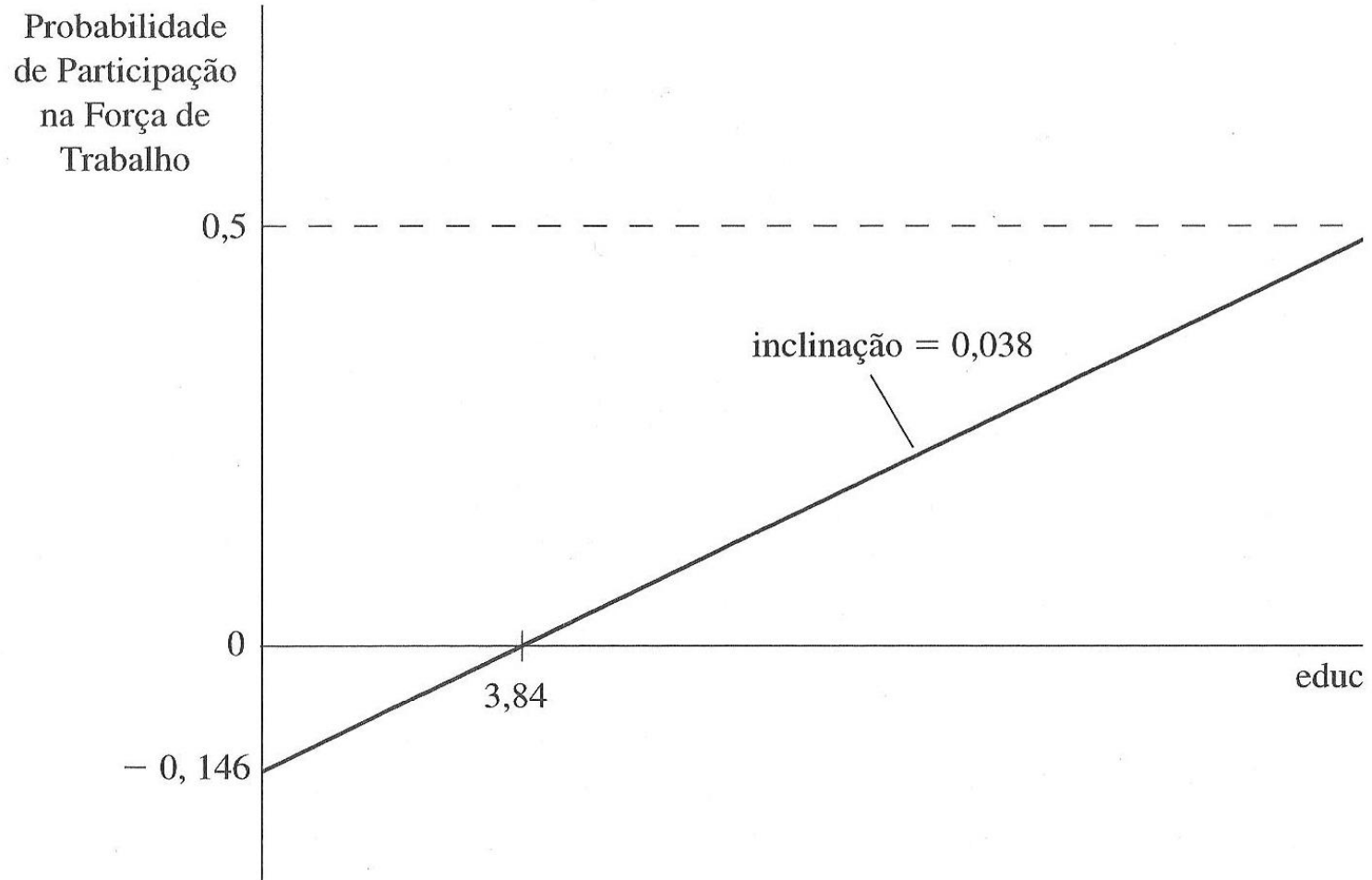
- O coeficiente de *educ* significa que, tudo o mais mantido fixo, mais um ano de educação, aumenta a probabilidade de participação na força de trabalho em 0,038.
  - Esse é o efeito marginal de mais um ano de educação na probabilidade de participação na força de trabalho.
- Há probabilidade negativa até 3,84 anos de estudo (gráfico a seguir), mas banco deste exemplo não tem indivíduos com menos de 5 anos de estudo.
- Experiência tem efeito positivo sobre participação na força de trabalho e depois passa a ser negativo.
  - A curva muda de direção em 32,5 anos de experiência:

$$\beta \text{ de } exper / (2 * \beta \text{ de } exper^2) = [0,039 / (2 * 0,0006)]$$

# EXEMPLO DE MODELO DE PROBABILIDADE LINEAR

Figura 7.3

Relação estimada entre a probabilidade de estar na força de trabalho e anos de educação, com outras variáveis explicativas fixas.



# DEFICIÊNCIAS DO MODELO DE PROBABILIDADE LINEAR

- É possível que certas combinações de valores das variáveis independentes gerem previsões menores que zero ou maiores que um:
  - Como estas são probabilidades, que devem estar entre zero e um, isso pode ser um pouco complicado.
- A probabilidade não pode ser linearmente relacionada com as variáveis independentes em todos os possíveis valores:
  - Por exemplo, se efeito de passar de 0 para 1 filho menor de 6 anos reduz probabilidade de trabalhar em 0,262, ao passar de 0 para 4 filhos, a probabilidade de trabalhar reduz em 1,048 ( $0,262 \times 4$ ), o que é impossível ( $p > 1$ ).
- Mesmo com estes problemas, o modelo de probabilidade linear é útil e frequentemente aplicado:
  - Ele funciona bem com valores das variáveis independentes próximos das médias na amostra.

# INSERINDO VARIÁVEIS BINÁRIAS INDEPENDENTES

- Podemos incluir variáveis binárias independentes em modelos com variável binária dependente.
- O coeficiente mede a diferença prevista na probabilidade quando a variável binária independente vai de zero a um.
- Por exemplo, se adicionarmos variáveis binárias de raça (branco, negro, hispânico) na explicação da probabilidade de ser preso (pág. 235), obtemos:

$$\textit{prisão} = 0,380 + 0,170 \textit{ negro} + 0,096 \textit{ hispânico} + \dots$$

- O coeficiente de *negro* significa que, todos os outros fatores iguais, um homem negro tem uma probabilidade 0,17 maior de ser preso que um homem branco (grupo de referência).
- Outra forma de interpretação é dizer que probabilidade de prisão é 17% maior para os negros do que para os brancos.
- Para ser mais exato, negros têm 1,19 [ $\exp(0,17)$ ] vezes mais chance de serem presos do que brancos (ou 19% mais).

## USO PRÁTICO DE VARIÁVEIS BINÁRIAS

- Precisamos ser cuidadosos ao avaliarmos variáveis binárias nas Ciências Sociais.
- Na maioria dos casos, as unidades de análise não foram selecionadas aleatoriamente para fazer parte de um grupo ou de outro.
- Devemos procurar saber se fatores não observados que afetam a variável dependente podem estar correlacionados com as variáveis independentes binárias de interesse.
- Ou seja, é preciso incluir fatores que possam estar relacionados com estas variáveis independentes.
- Introdução de informações de períodos anteriores podem ser úteis na estimação do impacto das independentes.

## PROBLEMAS DE AUTO-SELEÇÃO

- Indivíduos se auto-selecionam para certos procedimentos ou programas, o que não é uma escolha aleatória:
  - Pessoas escolhem fazer uso de drogas.
  - Crianças entram em programas de saúde infantil por decisão dos pais.
- Ou seja, a participação não é determinada de forma aleatória, havendo problemas de **auto-seleção**.
- Mais uma vez, é preciso incluir outras variáveis na regressão, quando indicador binário de interesse (independente) for relacionado com fatores não-observados.
- Incluímos fatores relacionados com variável independente de interesse para corrigir endogeneidade, mas talvez somente métodos mais avançados serão eficazes.