

AULAS 04 E 05

Estatísticas Descritivas

Ernesto F. L. Amaral

19 e 28 de agosto de 2010
Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)

Fonte:

Triola, Mario F. 2008. “Introdução à estatística”. 10^a ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 3 (pp.60-109).

ESQUEMA DA AULA

- Medidas de centro.
- Medidas de variação.
- Medidas de posição relativa.
- Análise exploratória de dados (AED).

ESTATÍSTICA DESCRITIVA E INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

- Triola afirma que estatística descritiva e inferência estatística são as duas divisões gerais do objeto da estatística.
- King, Keohane e Verba falam em inferência descritiva e inferência causal.
- Neste momento, estamos trabalhando com métodos de estatística descritiva, já que objetivo é de resumir ou descrever as características importantes de um conjunto de dados.
- Posteriormente, usaremos métodos de inferência estatística (nos termos de Triola), com objetivo de fazer generalizações sobre uma população, utilizando dados amostrais.
- Ou seja, a inferência estatística visa realizar análises que vão além dos dados conhecidos.

MEDIDAS DE CENTRO

MEDIDAS DE CENTRO

- Medida de centro é um valor no centro ou meio do conjunto de dados.
- Desejamos obter um número que represente o valor central de um conjunto de dados.
- Os conceitos e métodos para encontrar média e mediana devem ser bem entendidos.
- O valor da média pode ser muito afetado pela presença de um valor discrepante (“outlier”), mas a mediana não é tão sensível a um “outlier”.

MÉDIA

- **Média aritmética** é calculada pela adição dos valores de uma variável e divisão deste total pelo número de valores.
- Essa medida é muito utilizada na descrição de dados.

$$Média = \frac{\sum x}{n}$$

- **Estatísticas amostrais** são usualmente representadas por letras do alfabeto latino e minúsculas:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

- **Parâmetros populacionais** são representados por letras gregas e maiúsculas:

$$\mu = \frac{\sum x}{N}$$

MEDIANA

- **Mediana** é o valor do meio quando os dados originais estão organizados em ordem crescente (ou decrescente) de magnitude(\tilde{x}).
- Para **encontrar a mediana**:
 - 1) Ordene os valores de uma variável.
 - 2) Se o número de valores for ímpar, a mediana será o número localizado no meio exato da lista.

ou

 - 2) Se o número de valores for par, a mediana será encontrada pelo cálculo da média dos dois números do meio.
- A média é afetada por **valores extremos**, ao contrário da mediana. Por isso, quando temos “outliers”, mediana pode ser mais apropriada.

MODA

- A **moda** de um conjunto de dados é o valor que ocorre com maior frequência.
- Conjunto de dados **bimodal**: quando dois valores ocorrem com maior frequência, cada um é uma moda.
- Conjunto de dados **multimodal**: quando mais de dois valores ocorrem com maior frequência.
- Quando nenhum valor se repete, não há moda.
- Moda não é muito usada com dados numéricos.
- Dentre as medidas de centro consideradas, é a única que pode ser usada com dados no nível nominal de mensuração (nomes, rótulos e categorias).
- Não faz muito sentido realizar cálculos numéricos (média e mediana) com dados categóricos.

PONTO MÉDIO

- **Ponto médio** é a medida de centro que é exatamente o valor a meio caminho entre o maior valor e o menor valor no conjunto original de dados.
- É encontrado pela soma do maior valor e o menor valor dos dados, dividindo-se a soma por 2:

$$\text{ponto médio} = \frac{\text{valor máximo} + \text{valor mínimo}}{2}$$

- É raramente utilizado, já que é muito sensível a valores extremos.
- Vantagens: (1) fácil de calcular; e (2) evidencia que há diferentes maneiras de definir centro dos dados.
- Não deve ser confundido com mediana.

REGRA DE ARREDONDAMENTO

- Use uma casa decimal a mais do que é apresentado no conjunto original de valores:
 - A média de 80,4 e 80,6 é igual a 80,50.
- Quando valores originais são números inteiros, arredondamos para o décimo mais próximo:
 - A média de 2, 3, 5 é igual a 3,3.
- Arredonde apenas a resposta final e não os valores intermediários que surgirem durante os cálculos.

MÉDIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA

- A média de uma população não é necessariamente igual à média das médias de diferentes subconjuntos da população.
- Quando usamos dados resumidos em uma distribuição de frequência, devemos considerar o ponto médio de cada classe, pois não temos os valores de cada observação.
- Por exemplo, o intervalo de classe de 21-30 (anos) assumirá o valor de 25,5 (ponto médio da classe).
- Procedimento:
 - 1) Multiplique cada frequência pelo ponto médio da classe e adicione os produtos: $\sum(f * x)$
 - 2) Adicione as frequências: $\sum f$
 - 3) Divida 1 por 2: $\sum(f * x) / \sum f$

EXEMPLO

Idade da atriz	Frequência (<i>f</i>)	Ponto médio da classe (<i>x</i>)	<i>f</i> * <i>x</i>
21-30	28	25,5	714
31-40	30	35,5	1.065
41-50	12	45,5	546
51-60	2	55,5	111
61-70	2	65,5	131
71-80	2	75,5	151
Total	76	---	2.718

$$\bar{x} = \frac{\sum(f * x)}{\sum f} = \frac{2.718}{76} = 35,8$$

MÉDIA PONDERADA

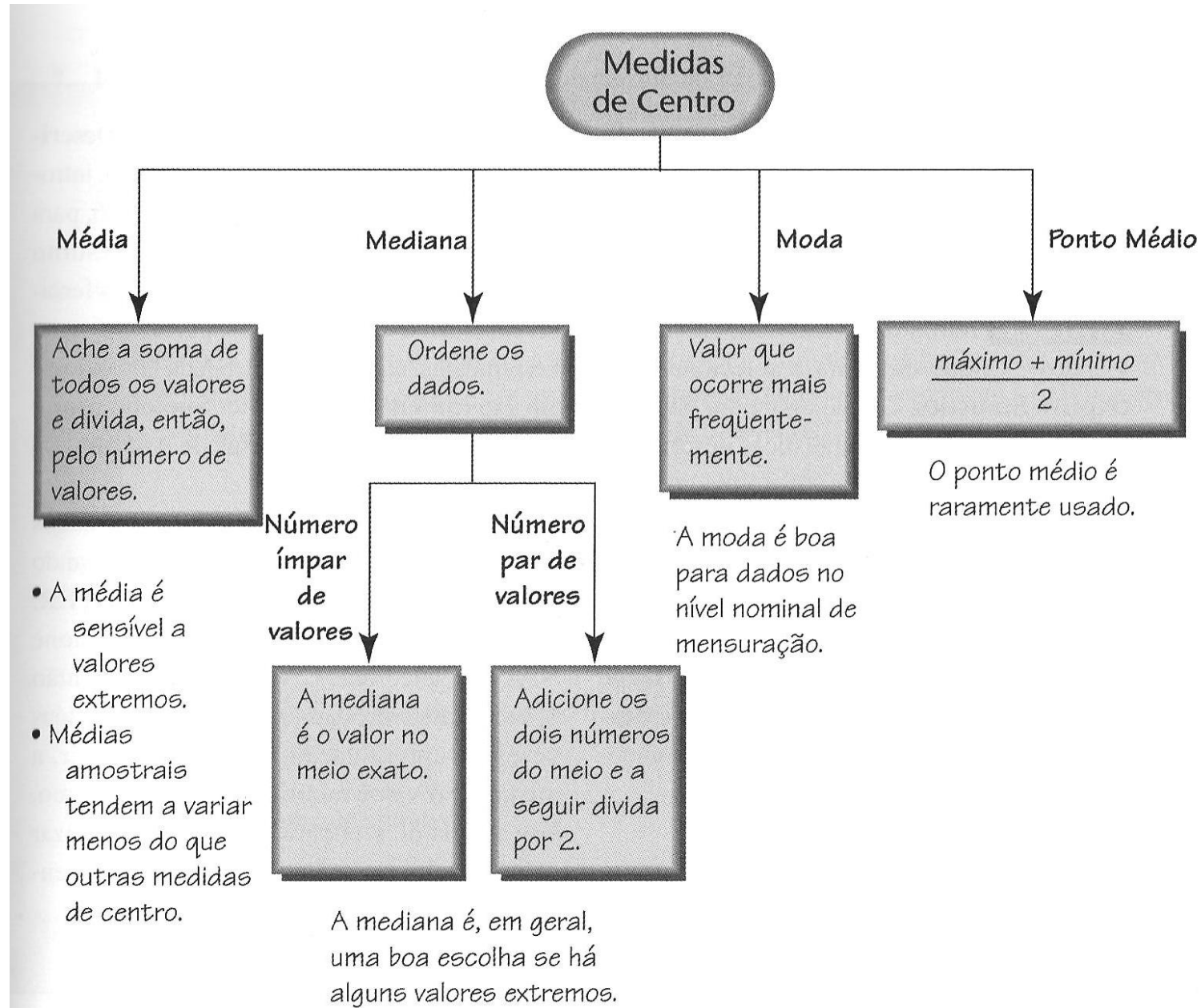
- Média ponderada dos valores de x é uma média calculada com os diferentes valores, associados a diferentes pesos (representados por w).

$$\bar{x} = \frac{\sum (w * x)}{\sum w}$$

- Por exemplo, nesta disciplina, teremos três exercícios, valendo 30%, 30% e 40% da nota final.
- Suponha que um aluno recebeu as notas: 70, 85, 80.
- A nota final será:

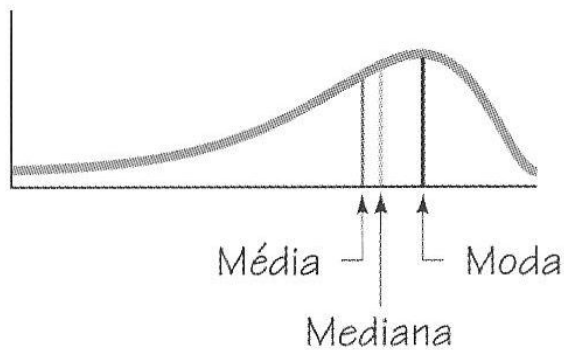
$$\bar{x} = \frac{(30 * 70) + (30 * 85) + (40 * 80)}{30 + 30 + 40} = \frac{7.850}{100} = 78,5$$

RESUMO DE MEDIDAS DE CENTRO

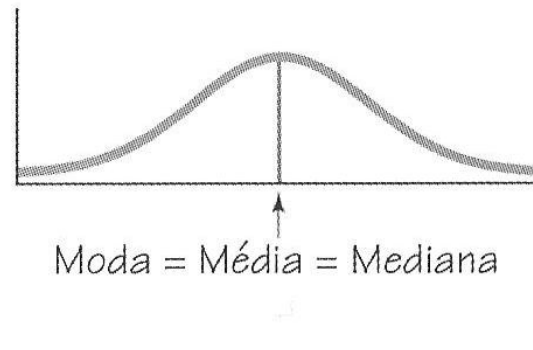


ASSIMETRIA

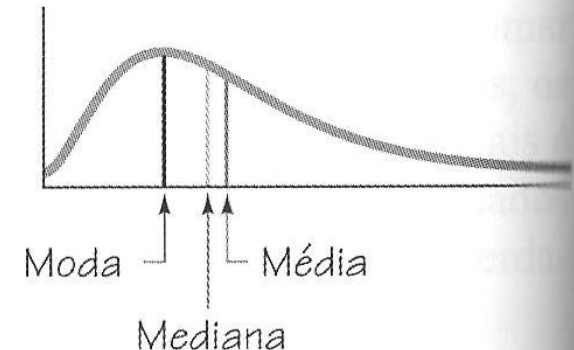
- Uma distribuição de dados é assimétrica quando se estende mais para um lado do que para o outro.
- A distribuição é simétrica se a metade esquerda de seu histograma é praticamente igual à sua metade direita.



(a) Assimétrica à Esquerda (Negativamente Assimétrica): A média e a mediana estão à esquerda da moda.



(b) Simétrica (Assimetria Zero): A média, mediana e moda são iguais.



(c) Assimétrica à Direita (Positivamente Assimétrica): A média e a mediana estão à direita da moda.

- Distribuições assimétricas à direita são mais comuns do que assimétricas à esquerda.

MEDIDAS DE VARIAÇÃO

MEDIDAS DE VARIAÇÃO

– Tempo médio de espera é igual nestas distribuições (6 min):

Banco 1: Filas de espera variáveis	6	6	6
Banco 2: Fila única de espera	4	7	7
Banco 3: Filas múltiplas de espera	1	3	14

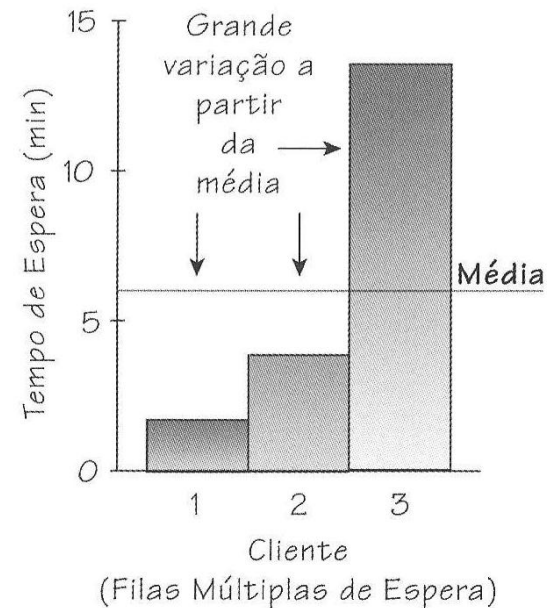
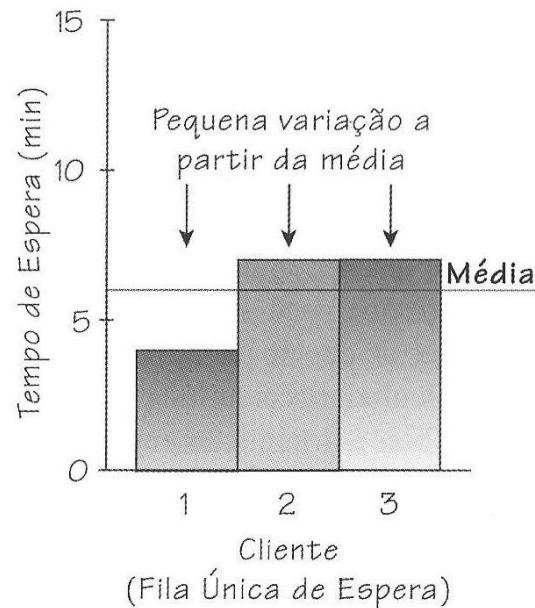
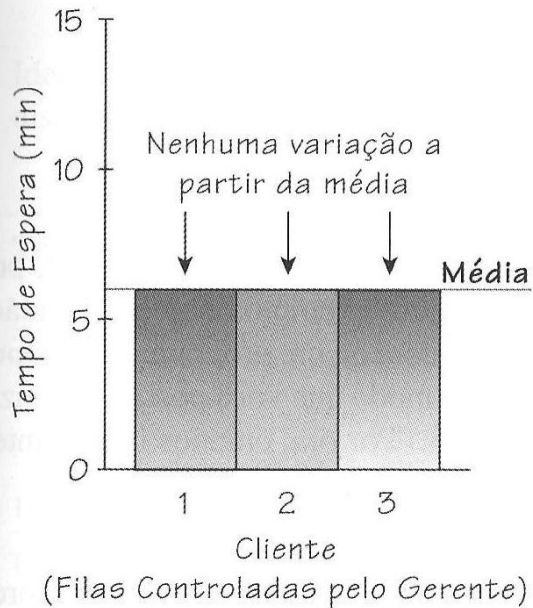


FIGURA 3-3 Tempos de Espera (min) de Clientes de Bancos

AMPLITUDE

- A amplitude de um conjunto de dados é a diferença entre o maior valor e o menor valor:

$$\text{amplitude} = (\text{valor máximo}) - (\text{valor mínimo})$$

- Essa é uma medida fácil de ser calculada.
- Porém, ao usar apenas os valores máximo e mínimo, não é tão útil quanto as outras medidas de variação que usam todos valores.

DESVIO PADRÃO AMOSTRAL

- O desvio padrão de um conjunto de valores amostrais é uma medida de variação dos valores em torno da média.
- Indica o desvio médio dos valores em relação à média.
- Fórmula do desvio padrão amostral:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Fórmula que simplifica cálculos aritméticos:

$$s = \sqrt{\frac{n \sum (x^2) - (\sum x)^2}{n(n - 1)}}$$

PROPRIEDADES DO DESVIO PADRÃO

- O desvio padrão é uma medida da variação de todos valores a partir da média.
- O valor do desvio padrão (s):
 - É usualmente positivo.
 - Igual a zero quando todos valores dos dados são iguais.
 - Nunca é negativo.
- Maiores valores de s indicam maior variação.
- Valor de s pode crescer muito com a inclusão de um ou mais “outliers”.
- As unidades de s são as mesmas unidades dos dados originais.

CALCULANDO O DESVIO PADRÃO

- Calcule a média (\bar{x}).
- Subtraia a média de cada valor individual para obter uma lista de desvios ($x - \bar{x}$).
- Eleve ao quadrado cada uma das diferenças obtidas no passo anterior ($(x - \bar{x})^2$).
- Some todos quadrados obtidos no passo acima $\sum (x - \bar{x})^2$.
- Divida o total do passo anterior pelo total de valores presentes menos uma unidade ($n - 1$).
- Calcule a raiz quadrada do passo anterior.

DESVIO PADRÃO POPULACIONAL

- O desvio padrão da população (σ) utiliza o tamanho da população (N) no denominador:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x - \mu)^2}{N}}$$

VARIÂNCIA

- **Variância** de um conjunto de valores é uma medida da variação (dispersão) igual ao quadrado do desvio padrão.
- A **variância amostral** (s^2) é o quadrado do desvio padrão amostral (s).
- A **variância populacional** (σ^2) é o quadrado do desvio padrão populacional (σ).
- A variância amostral é considerada um **estimador não-viesado** da variância populacional:
 - Ao realizar várias vezes amostras aleatórias de uma população, os diferentes valores de s^2 tendem a se concentrar em torno do valor de σ^2 (sem superestimação ou subestimação).
- Unidades da variância são diferentes das unidades originais.

NOTAÇÃO E REGRA DE ARREDONDAMENTO

- s = desvio padrão amostral
- s^2 = variância amostral

- σ = desvio padrão populacional
- σ^2 = variância populacional

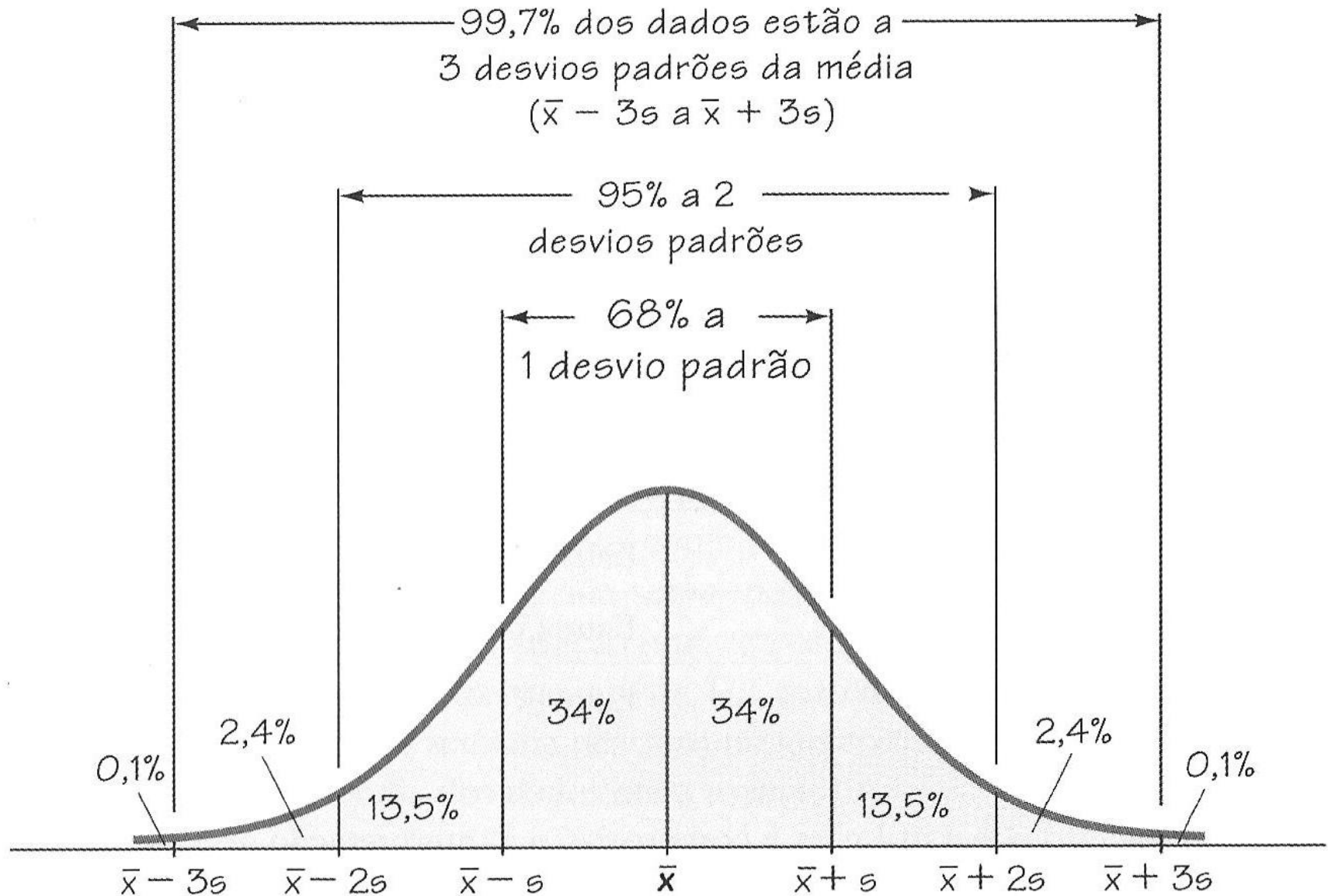
- SD = DP = desvio padrão (standard deviation)
- VAR = variância

- Como regra de arredondamento, use uma casa decimal a mais do que é apresentado no conjunto original de dados.

REGRA EMPÍRICA DA AMPLITUDE

- Desvio padrão mede a variação entre valores:
 - Valores muito próximos >>> desvios padrão pequenos.
 - Valores mais espalhados >>> desvios padrão maiores.
- A **regra empírica da amplitude** indica que para muitos conjuntos de dados, a grande maioria (95%) dos valores amostrais se localiza a 2 desvios padrões da média.
- Isso varia com tamanho amostral e natureza da distribuição.
- Desvio padrão (“grosseiro”) de dados amostrais:
$$s \approx \text{amplitude} / 4 \approx [(\text{valor máximo}) - (\text{valor mínimo})] / 4$$
- Valor amostral mínimo (usual) = média – (2 * desvio padrão)
- Valor amostral máximo (usual) = média + (2 * desvio padrão)

REGRA EMPÍRICA PARA DADOS COM FORMA APROXIMADA DE SINO (DISTRIBUIÇÃO NORMAL)



TEOREMA DE CHEBYSHEV

- A regra empírica anterior se aplica somente a conjuntos de dados com distribuição em forma de sino.
- O teorema de Chebyshev se aplica a quaisquer conjuntos de dados, mas seus resultados são muito aproximados.
- A proporção (fração) de qualquer conjunto de dados que se situa a K desvios padrões da média é sempre, no mínimo, $1-1/K^2$, onde K é qualquer número positivo maior do que 1.
- Para $K=2$: $(1-1/2^2)=3/4 \ggg$ pelo menos 75% de todos valores se localizam a 2 desvios padrões da média.
- Para $K=3$: $(1-1/3^2)=8/9 \ggg$ pelo menos 89% de todos valores se localizam a 3 desvios padrões da média.
- Na regra empírica, esses valores são de 95% e 99,7%.

POR QUE NÃO USAR DESVIO MÉDIO ABSOLUTO?

- Poderíamos calcular o desvio médio absoluto (DMA), que também evita que a soma das diferenças seja igual a zero:

$$DMA = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

- Cálculo de valores absolutos requer **operação não algébrica** (que são: adição, multiplicação, raízes, potências).
- Valores absolutos criam **dificuldades algébricas** nas inferências estatísticas (regressão e análise da variância).
- **Viés**: desvios médios absolutos de amostras não tendem ao valor do desvio médio absoluto da população.
- Por isso, usamos o desvio padrão que transforma variações em valores não-negativos pela elevação ao quadrado.

POR QUE DIVIDIR POR $n - 1$?

- Dividimos o desvio padrão amostral por $n - 1$, porque há apenas $n - 1$ valores independentes.
- Ou seja, dada uma média, apenas $n - 1$ valores podem ser associados a qualquer número, antes que o último valor seja determinado.
- Além disso, se s^2 fosse definido como a divisão por n , ele sistematicamente subestimaria o valor de σ^2 , o que é compensado pela diminuição do denominador.
- Vejam exercício 38 (pp. 88-89).

POR QUE EXTRAIR A RAIZ QUADRADA?

- Ao final do cálculo do desvio padrão, extraímos a raiz quadrada.
- Isso é realizado para compensar os quadrados que são estimados anteriormente.
- Ao calcular a raiz quadrada, o desvio padrão tem as mesmas unidades de medida dos dados originais.

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

- Por ter as mesmas unidades dos dados originais, o desvio padrão é mais fácil de entender do que a variância.
- Porém, com o desvio padrão, é difícil comparar a dispersão para valores de diferentes variáveis (ex.: peso e altura).
- **Coeficiente de variação** (CV) supera essa desvantagem, por não ter unidade específica, permitindo comparação das variações.
- O CV para um conjunto de dados amostrais ou populacionais não-negativos é expresso como um percentual e descreve o desvio padrão em relação à média:
 - Amostra: $CV = s/\bar{x} * 100\%$
 - População: $CV = \sigma/\mu * 100\%$

MEDIDAS DE POSIÇÃO RELATIVA

MEDIDAS DE POSIÇÃO RELATIVA

- As medidas de posição relativa permitem a comparação de valores de conjuntos de dados diferentes ou de valores dentro de um mesmo conjunto de dados.
- Os **escores z** permitem a comparação de valores de diferentes conjuntos de dados.
- Os **quartis** e **percentis** permitem a comparação de valores dentro do mesmo conjunto de dados, assim como entre diferentes conjuntos de dados.

ESCORES z

- Um escore z é obtido pela conversão de um valor para uma escala padronizada.
- O escore padronizado é o número de desvios padrões a que se situa determinado valor de x , acima ou abaixo da média:

- Amostra: $Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

- População: $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

ESCORES z E VALORES NÃO-USUAIS

- Valores não-usuais são aqueles com escores z menores do que $-2,00$ ou maiores do que $+2,00$.
- Valores comuns: $-2 \leq \text{escore } z \leq 2$
- Valores não-usuais: $\text{escore } z < -2$ ou $\text{escore } z > 2$
- Sempre que um valor é menor do que a média, seu escore z correspondente é negativo.
- Escores z são medidas de posição, já que descrevem a localização de um valor (em termos de desvios padrões) em relação à média:
 - $z=2$: valor está 2 desvios padrões acima da média.
 - $z=-3$: valor está 3 desvios padrões abaixo da média.

QUARTIS

- A **mediana** divide os dados ordenados em 2 partes iguais:
 - 50% dos valores de um conjunto de dados são iguais ou menores do que a mediana, e 50% são iguais ou maiores.
- Os **quartis (Q_1 , Q_2 e Q_3)** dividem os valores ordenados em 4 partes iguais:
 - Q_1 (primeiro quartil): separa os 25% inferiores dos 75% superiores.
 - Q_2 (segundo quartil): mesmo que a mediana; separa os 50% inferiores dos 50% superiores.
 - Q_3 (terceiro quartil): separa os 75% inferiores dos 25% superiores.

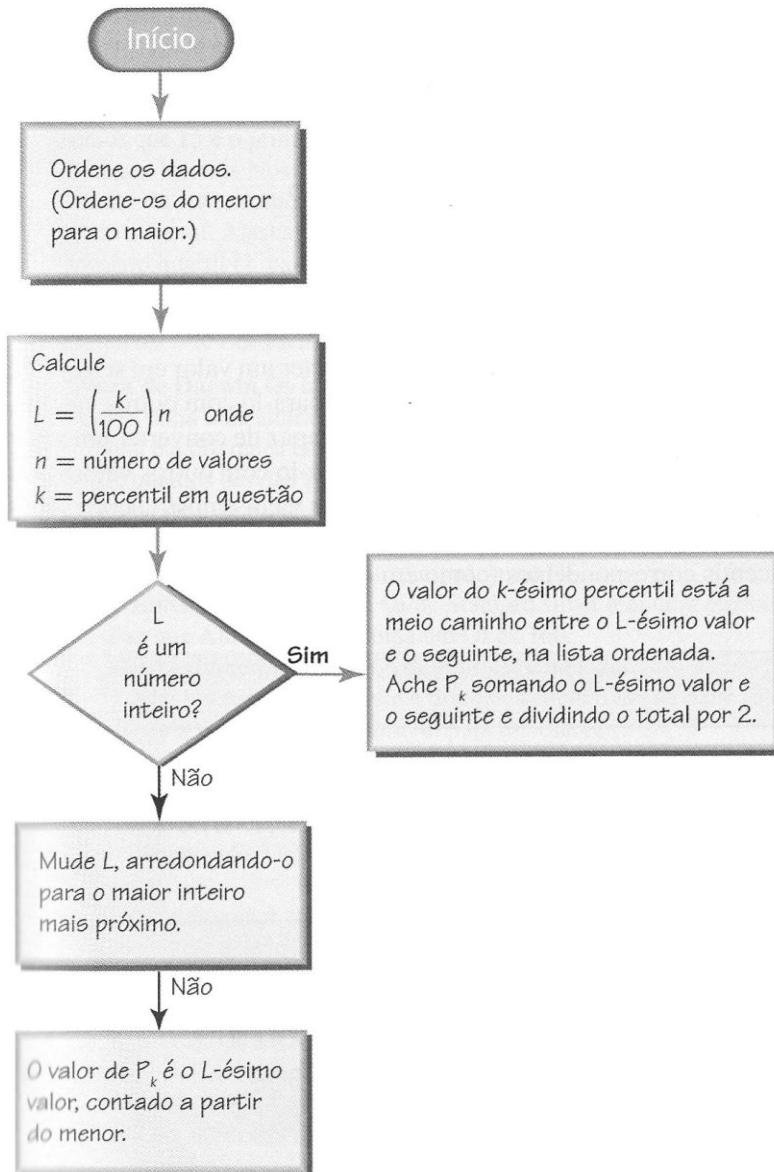
PERCENTIS

- Há 99 **percentis** (P_1, P_2, \dots, P_{99}) que dividem os dados ordenados em 100 grupos com cerca de 1% dos valores em cada um.
- Os quartis e percentis são exemplos de quantis, os quais dividem os dados em grupos com aproximadamente o mesmo número de valores.
- Utilize a seguinte fórmula, arredondando o resultado para o número inteiro mais próximo:

$$\text{percentil de } x = \frac{\textit{n}^\circ \textit{ valores menores do que } x}{\textit{n}^\circ \textit{ total de valores}} * 100$$

- Note que: $Q_1 = P_{25}$; $Q_2 = P_{50}$; $Q_3 = P_{75}$

CONVERTENDO PERCENTIS EM VALOR DE DADOS



– Sendo:

- n : número total de valores no conjunto de dados.
- k : percentil em uso (ex.: para o 25^o percentil, $k=25$).
- L : localizador que dá a posição de um valor (ex.: para o 12^o valor na lista ordenada, $L=12$).
- P_k : k -ésimo percentil (ex.: P_{25} é o 25^o percentil).

FIGURA 3-6 Conversão do k -ésimo Percentil no Valor de Dado Correspondente

ESTATÍSTICAS DEFINIDAS POR QUARTIS E PERCENTIS

- Intervalo interquartil (IIQ) = $Q_3 - Q_1$
- Intervalo semi-interquartil = $(Q_3 - Q_1) / 2$
- Ponto médio dos quartis = $(Q_3 + Q_1) / 2$
- Intervalo percentílico 10–90 = $P_{90} - P_{10}$

ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS (AED)

ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS (AED)

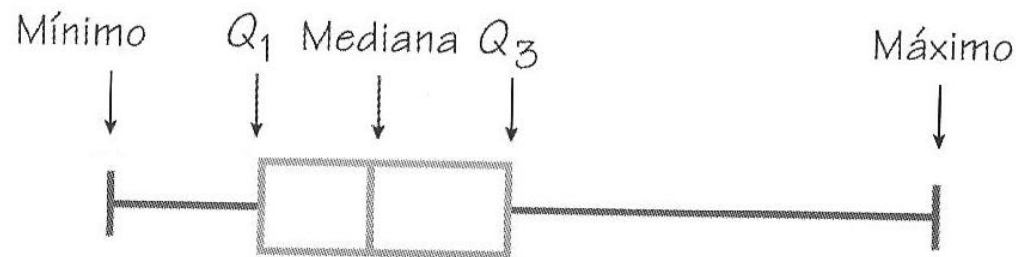
- Análise exploratória de dados é o processo de uso das ferramentas estatísticas (gráficos, medidas de centro, medidas de variação...) para investigação de conjuntos de dados com objetivo de se compreenderem suas características importantes.
- Podemos explorar características dos dados: centro (média, mediana); variação (desvio padrão, amplitude), distribuição (histogramas); *outliers*; mudança no tempo.
- Aqui serão discutidos os valores discrepantes (*outliers*) e o diagrama de caixa (*boxplot*).

VALORES DISCREPANTES (*OUTLIERS*)

- Valor *outlier* (valor extremo) é aquele que se localiza muito afastado de quase todos os demais valores.
- Estes valores podem ter efeito dramático sobre:
 - A média.
 - O desvio padrão.
 - A escala do histograma, de modo que a verdadeira natureza da distribuição pode ser totalmente obscurecida.
- *Outliers* podem ser erros: devem ser corrigidos ou ignorados
- *Outliers* podem ser corretos: devemos estudar seus efeitos, construindo gráficos e calculando estatísticas, com e sem *outliers*, buscando revelar importantes informações.

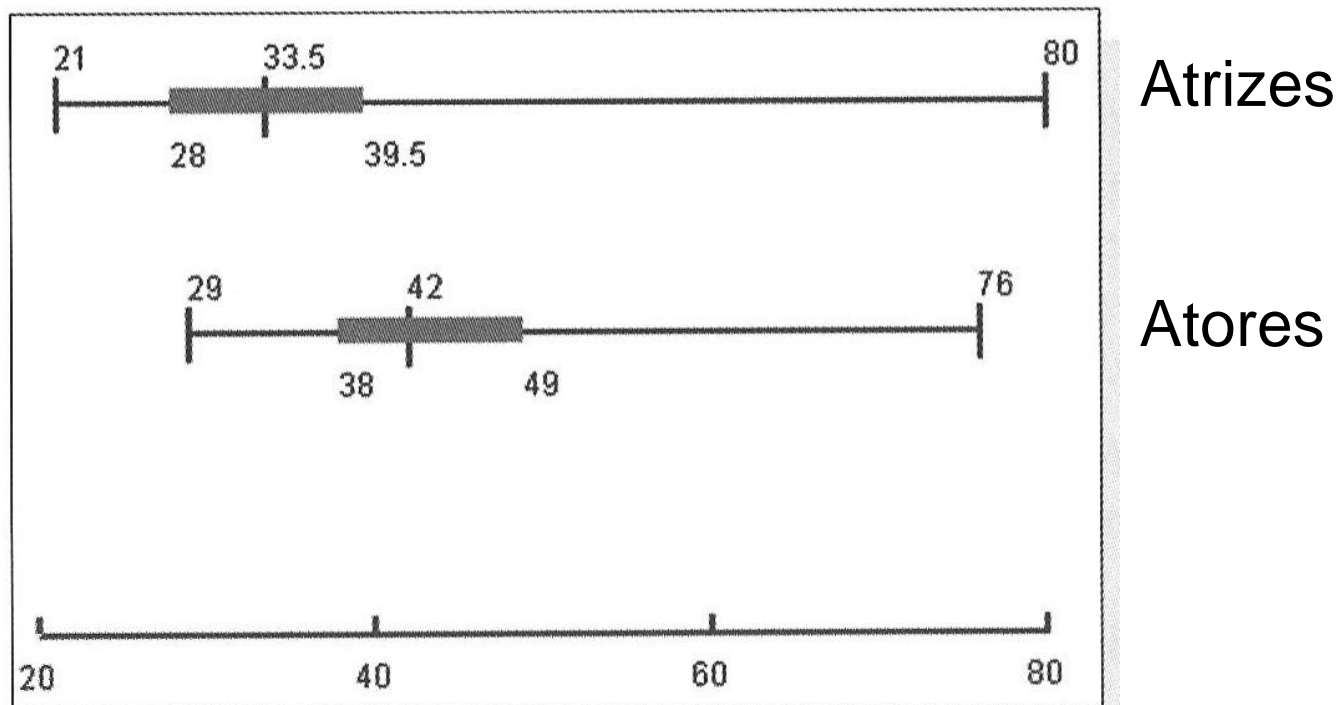
DIAGRAMAS DE CAIXA (*BOXPLOTS*)

- Para um conjunto de dados, o **resumo dos cinco números** consiste no valor mínimo, primeiro quartil (Q_1), mediana (Q_2), terceiro quartil (Q_3) e no valor máximo.
- **Diagrama de caixa** (diagrama de caixa e bigode) é um gráfico de um conjunto de dados que consiste em: (1) uma linha que se estende do valor mínimo ao valor máximo; (2) uma caixa com linhas traçadas no primeiro quartil (Q_1), na mediana (Q_2) e no terceiro quartil (Q_3).
- Os diagramas de caixa são úteis para revelar centro, dispersão, distribuição e *outliers*.



UTILIDADE DOS DIAGRAMAS DE CAIXA

- Diagramas de caixa não apresentam informação tão detalhada como histogramas e digramas de ramo e folhas.
- Porém, são úteis na comparação de dois ou mais conjuntos de dados, quando desenhados na mesma escala.
- *Boxplots* para idades dos melhores atores e atrizes:



DIAGRAMAS DE CAIXA MODIFICADOS

- Diagramas de caixa modificados representam *outliers* com símbolos especiais (asteriscos).
- Lembrando que $IQ = Q_3 - Q_1$, um valor é *outlier* se está:
 - Acima de Q_3 por uma quantidade maior do que $1,5 \times IQ$.
 - ou
 - Abaixo de Q_1 por uma quantidade maior do que $1,5 \times IQ$.
- A linha sólida horizontal se estende apenas até o menor valor dos dados que não são *outliers* e até o maior valor dos dados que não são *outliers*.

