AULAS 04 E 05
Estatísticas Descritivas

Ernesto F. L. Amaral

18 e 23 de agosto de 2011
Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)

Fonte:
Triola, Mario F. 2008. "Introdução à estatística". 10 ª ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 3 (pp.60-109).

ESQUEMA DA AULA

– Medidas de centro.

– Medidas de variação.

– Medidas de posição relativa.

– Análise exploratória de dados (AED).

ESTATÍSTICA DESCRITIVA E INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

– Triola afirma que estatística descritiva e inferência estatística são as duas divisões gerais do objeto da estatística.

– King, Keohane e Verba falam em inferência descritiva e inferência causal.

– Neste momento, estamos trabalhando com métodos de estatística descritiva, já que objetivo é de resumir ou descrever as características importantes de um conjunto de dados.

– Posteriormente, usaremos métodos de inferência estatística (nos termos de Triola), com objetivo de fazer generalizações sobre uma população, utilizando dados amostrais.

– Ou seja, a inferência estatística visa realizar análises que vão além dos dados conhecidos.

MEDIDAS DE CENTRO

MEDIDAS DE CENTRO

– Medida de centro é um valor no centro ou meio do conjunto de dados.

– Desejamos obter um número que represente o valor central de um conjunto de dados.

– Os conceitos e métodos para encontrar média e mediana devem ser bem entendidos.

– O valor da média pode ser muito afetado pela presença de um valor discrepante (“outlier”), mas a mediana não é tão sensível a um “outlier”.

MÉDIA

– **Média aritmética** é calculada pela adição dos valores de uma variável e divisão deste total pelo número de valores.

– Essa medida é muito utilizada na descrição de dados.

$$Média = \frac{\sum x}{n}$$

– **Estatísticas amostrais** são usualmente representadas por letras do alfabeto latino e minúsculas:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

– **Parâmetros populacionais** são representados por letras gregas e maiúsculas:

$$\mu = \frac{\sum x}{N}$$

MEDIANA

– **Mediana** é o valor do meio quando os dados originais estão organizados em ordem crescente (ou decrescente) de magnitude $(\tilde{x})$.

– Para **encontrar a mediana**:

1) Ordene os valores de uma variável.

2) Se o número de valores for ímpar, a mediana será o número localizado no meio exato da lista.

ou

2) Se o número de valores for par, a mediana será encontrada pelo cálculo da média dos dois números do meio.

– A média é afetada por **valores extremos**, ao contrário da mediana. Por isso, quando temos “outliers”, mediana pode ser mais apropriada.

MODA

– A **moda** de um conjunto de dados é o valor que ocorre com maior frequência.

– Conjunto de dados **bimodal**: quando dois valores ocorrem com maior frequência, cada um é uma moda.

– Conjunto de dados **multimodal**: quando mais de dois valores ocorrem com maior frequência.

– Quando nenhum valor se repete, não há moda.

– Moda não é muito usada com dados numéricos.

– Dentre as medidas de centro consideradas, é a única que pode ser usada com dados no nível nominal de mensuração (nomes, rótulos e categorias).

– Não faz muito sentido realizar cálculos numéricos (média e mediana) com dados categóricos.

PONTO MÉDIO

– **Ponto médio** é a medida de centro que é exatamente o valor a meio caminho entre o maior valor e o menor valor no conjunto original de dados.

– É encontrado pela soma do maior valor e o menor valor dos dados, dividindo-se a soma por 2:

$$ponto\ médio = \frac{valor\ máximo + valor\ mínimo}{2}$$

– É raramente utilizado, já que é muito sensível a valores extremos.

– Vantagens: (1) fácil de calcular; e (2) evidencia que há diferentes maneiras de definir centro dos dados.

– Não deve ser confundido com mediana.

REGRA DE ARREDONDAMENTO

- Use uma casa decimal a mais do que é apresentado no conjunto original de valores:
  - A média de 80,4 e 80,6 é igual a 80,50.

- Quando valores originais são números inteiros, arredondamos para o décimo mais próximo:
  - A média de 2, 3, 5 é igual a 3,3.

- Arredonde apenas a resposta final e não os valores intermediários que surgirem durante os cálculos.

MÉDIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA

– A média de uma população não é necessariamente igual à média das médias de diferentes subconjuntos da população.

– Quando usamos dados resumidos em uma distribuição de frequência, devemos considerar o ponto médio de cada classe, pois não temos os valores de cada observação.

– Por exemplo, o intervalo de classe de 21-30 (anos) assumirá o valor de 25,5 (ponto médio da classe).

– Procedimento:

1) Multiplique cada frequência pelo ponto médio da classe e adicione os produtos: $\sum(f * x)$

2) Adicione as frequências: $\sum f$

3) Divida 1 por 2: $\sum(f * x) / \sum f$

EXEMPLO

Idade da atriz	Frequência (*f*)	Ponto médio da classe (*x*)	***f * x***
21-30	28	25,5	714
31-40	30	35,5	1.065
41-50	12	45,5	546
51-60	2	55,5	111
61-70	2	65,5	131
71-80	2	75,5	151
Total	**76**	**---**	**2.718**

$$\bar{x} = \frac{\sum(f * x)}{\sum f} = \frac{2.718}{76} = 35{,}8$$

MÉDIA PONDERADA

– Média ponderada dos valores de *x* é uma média calculada com os diferentes valores, associados a diferentes pesos (representados por *w*).

$$\bar{x} = \frac{\sum(w * x)}{\sum w}$$

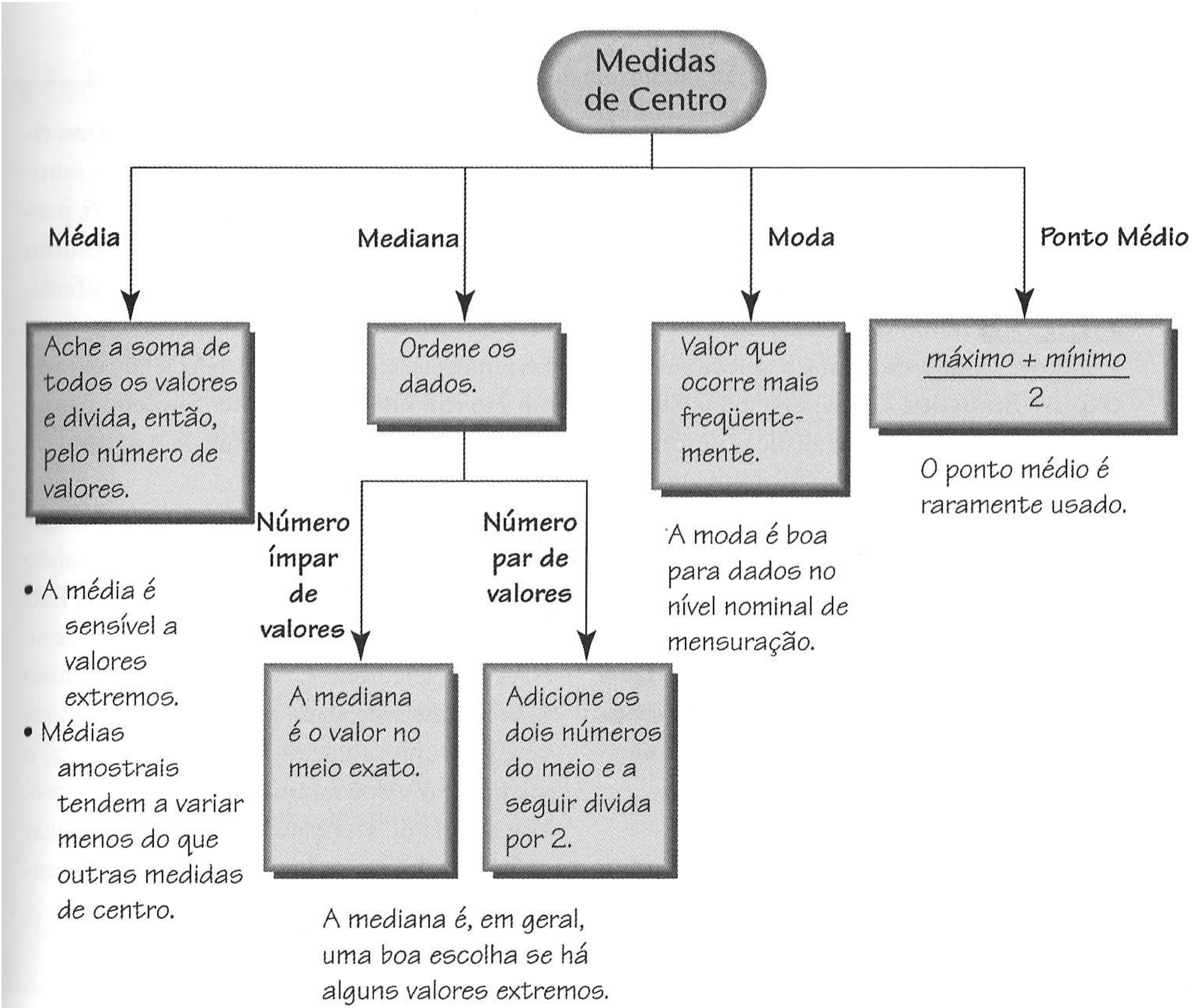
– Por exemplo, nesta disciplina, teremos três exercícios, valendo 30%, 30% e 40% da nota final.

– Suponha que um aluno recebeu as notas: 70, 85, 80.

– A nota final será:

$$\bar{x} = \frac{(30 * 70) + (30 * 85) + (40 * 80)}{30 + 30 + 40} = \frac{7.850}{100} = 78{,}5$$

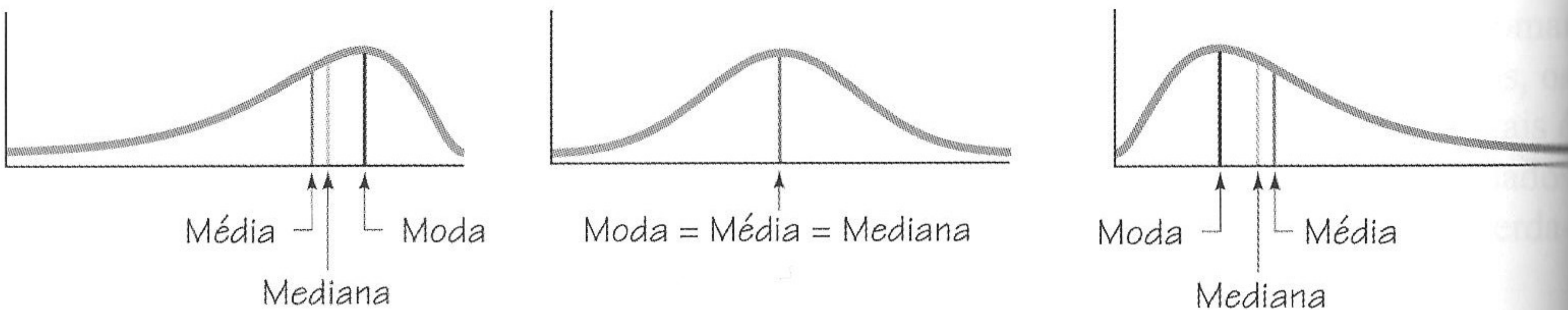
RESUMO DE MEDIDAS DE CENTRO



ASSIMETRIA

– Uma distribuição de dados é assimétrica quando se estende mais para um lado do que para o outro.

– A distribuição é simétrica se a metade esquerda de seu histograma é praticamente igual à sua metade direita.



(a) Assimétrica à Esquerda (Negativamente Assimétrica): A média e a mediana estão à esquerda da moda.

(b) Simétrica (Assimetria Zero): A média, mediana e moda são iguais.

(c) Assimétrica à Direita (Positivamente Assimétrica): A média e a mediana estão à direita da moda.

– Distribuições assimétricas à direita são mais comuns do que assimétricas à esquerda.

MEDIDAS DE VARIAÇÃO

MEDIDAS DE VARIAÇÃO

– Tempo médio de espera é igual nestas distribuições (6 min):

Banco 1: Filas de espera variáveis	6	6	6
Banco 2: Fila única de espera	4	7	7
Banco 3: Filas múltiplas de espera	1	3	14

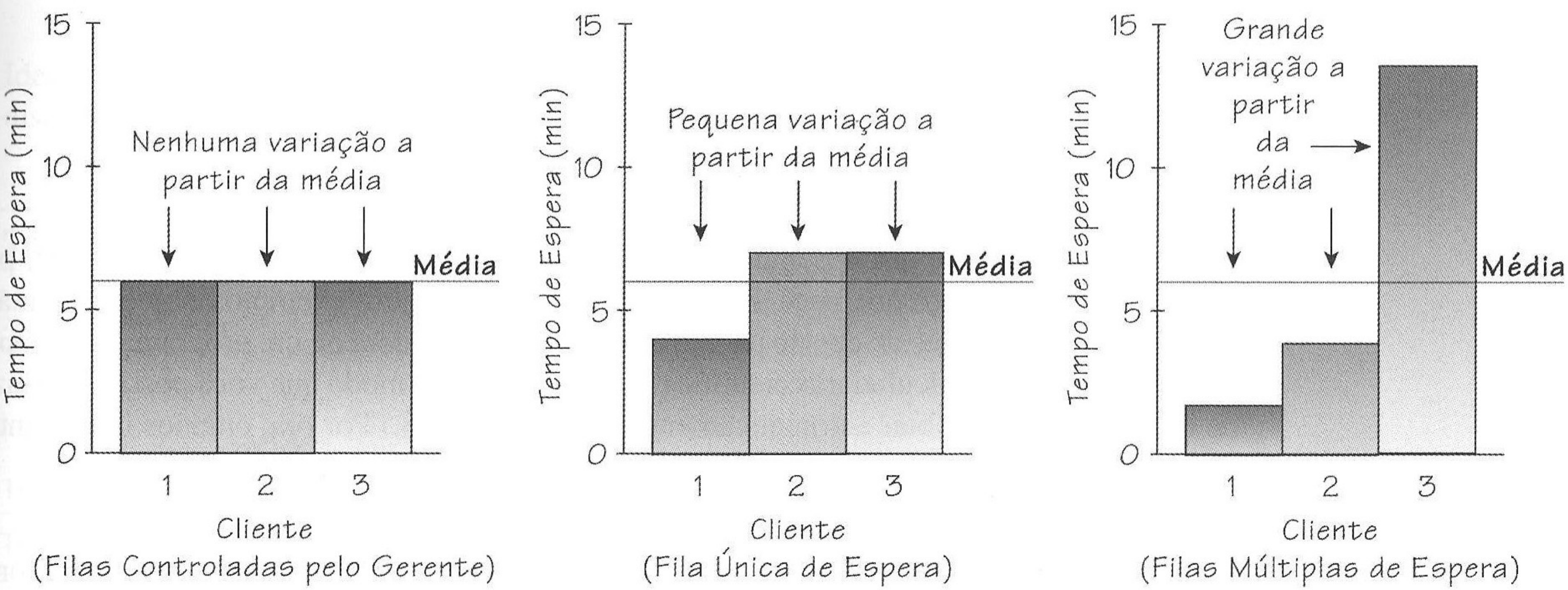


FIGURA 3-3 Tempos de Espera (min) de Clientes de Bancos

AMPLITUDE

– A amplitude de um conjunto de dados é a diferença entre o maior valor e o menor valor:

amplitude = (valor máximo) – (valor mínimo)

– Essa é uma medida fácil de ser calculada.

– Porém, ao usar apenas os valores máximo e mínimo, não é tão útil quanto as outras medidas de variação que usam todos valores.

DESVIO PADRÃO AMOSTRAL

- O desvio padrão de um conjunto de valores amostrais é uma medida de variação dos valores em torno da média.
- Indica o desvio médio dos valores em relação à média.
- Fórmula do desvio padrão amostral:

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Fórmula que simplifica cálculos aritméticos:

$$s = \sqrt{\frac{n \sum(x^2) - (\sum x)^2}{n(n - 1)}}$$

PROPRIEDADES DO DESVIO PADRÃO

– O desvio padrão é uma medida da variação de todos valores a partir da média.

– O valor do desvio padrão (s):

  – É usualmente positivo.

  – Igual a zero quando todos valores dos dados são iguais.

  – Nunca é negativo.

– Maiores valores de s indicam maior variação.

– Valor de s pode crescer muito com a inclusão de um ou mais “outliers”.

– As unidades de s são as mesmas unidades dos dados originais.

CALCULANDO O DESVIO PADRÃO

– Calcule a média $(\bar{x})$.

– Subtraia a média de cada valor individual para obter uma lista de desvios $(x - \bar{x})$.

– Eleve ao quadrado cada uma das diferenças obtidas no passo anterior $(x - \bar{x})^2$.

– Some todos quadrados obtidos no passo acima $\sum (x - \bar{x})^2$.

– Divida o total do passo anterior pelo total de valores presentes menos uma unidade (n – 1).

– Calcule a raiz quadrada do passo anterior.

DESVIO PADRÃO POPULACIONAL

– O desvio padrão da população (σ) utiliza o tamanho da população (N) no denominador:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\mu)^2}{N}}$$

VARIÂNCIA

– **Variância** de um conjunto de valores é uma medida da variação (dispersão) igual ao quadrado do desvio padrão.

– A **variância amostral** (s^2) é o quadrado do desvio padrão amostral (s).

– A **variância populacional** (σ^2) é o quadrado do desvio padrão populacional (σ).

– A variância amostral é considerada um **estimador não-viesado** da variância populacional:

  – Ao realizar várias vezes amostras aleatórias de uma população, os diferentes valores de s^2 tendem a se concentrar em torno do valor de σ^2 (sem superestimação ou subestimação).

– Unidades da variância são diferentes das unidades originais.

NOTAÇÃO E REGRA DE ARREDONDAMENTO

– s = desvio padrão amostral

– s^2 = variância amostral

– σ = desvio padrão populacional

– σ^2 = variância populacional

– SD = DP = desvio padrão (standard deviation)

– VAR = variância

– Como regra de arredondamento, use uma casa decimal a mais do que é apresentado no conjunto original de dados.

REGRA EMPÍRICA DA AMPLITUDE

– Desvio padrão mede a variação entre valores:

  – Valores muito próximos >>> desvios padrão pequenos.

  – Valores mais espalhados >>> desvios padrão maiores.

– A **regra empírica da amplitude** indica que para muitos conjuntos de dados, a grande maioria (95%) dos valores amostrais se localiza a 2 desvios padrões da média.

– Isso varia com tamanho amostral e natureza da distribuição.

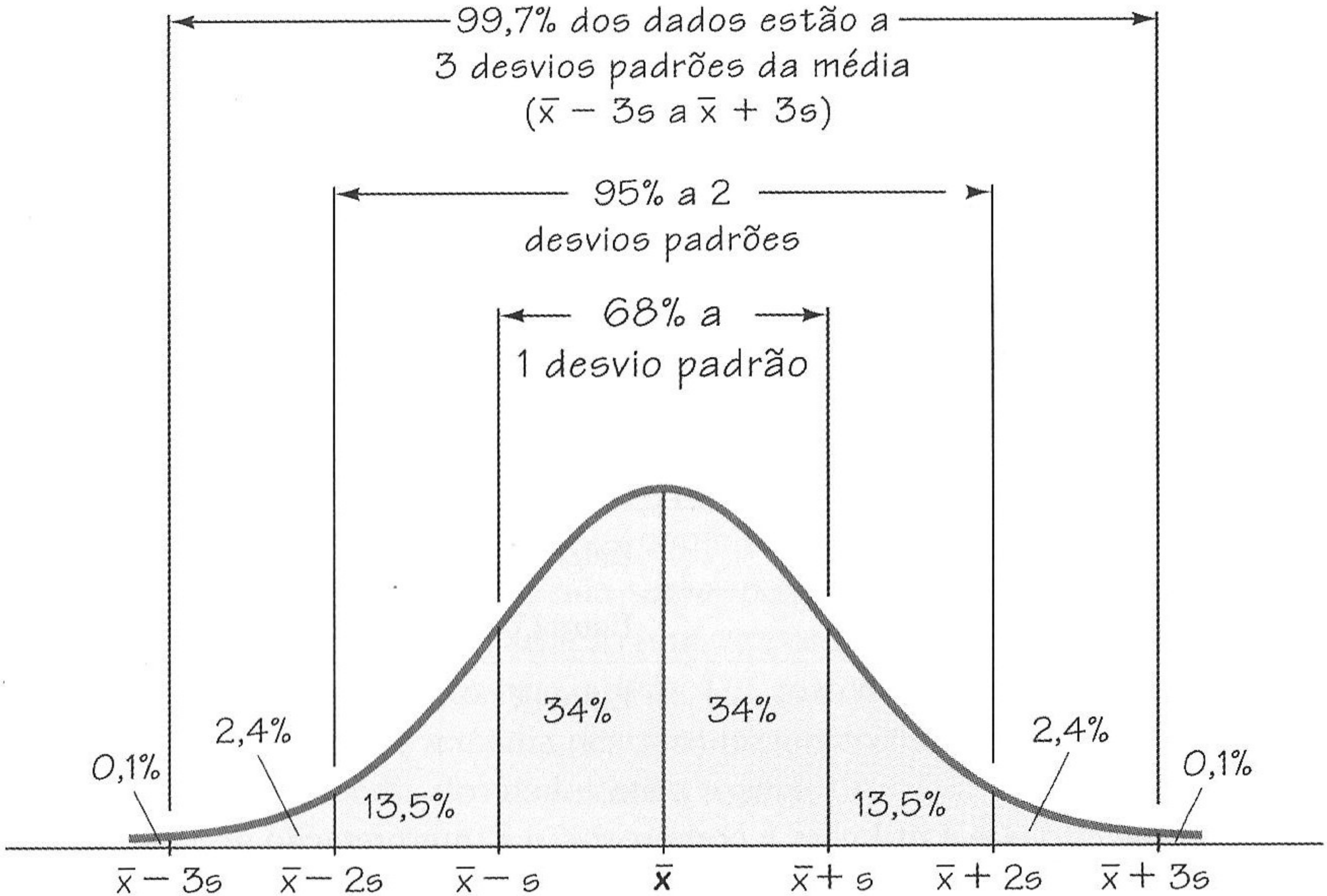
– Desvio padrão ("grosseiro") de dados amostrais:

$$s \approx \text{amplitude} / 4 \approx [(\text{valor máximo}) - (\text{valor mínimo})] / 4$$

– Valor amostral mínimo (usual) = média – (2 * desvio padrão)

– Valor amostral máximo (usual) = média + (2 * desvio padrão)

REGRA EMPÍRICA PARA DADOS COM FORMA APROXIMADA DE SINO (DISTRIBUIÇÃO NORMAL)



TEOREMA DE CHEBYSHEV

– A regra empírica anterior se aplica somente a conjuntos de dados com distribuição em forma de sino.

– O teorema de Chebyshev se aplica a quaisquer conjuntos de dados, mas seus resultados são muito aproximados.

– A proporção (fração) de qualquer conjunto de dados que se situa a *K* desvios padrões da média é sempre, no mínimo, $1–1/K^2$, onde *K* é qualquer número positivo maior do que 1.

– Para $K=2$: $(1–1/2^2)=3/4$ >>> pelo menos 75% de todos valores se localizam a 2 desvios padrões da média.

– Para $K=3$: $(1–1/3^2)=8/9$ >>> pelo menos 89% de todos valores se localizam a 3 desvios padrões da média.

– Na regra empírica, esses valores são de 95% e 99,7%.

POR QUE NÃO USAR DESVIO MÉDIO ABSOLUTO?

– Poderíamos calcular o desvio médio absoluto (DMA), que também evita que a soma das diferenças seja igual a zero:

$$DMA = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

– Cálculo de valores absolutos requer **operação não algébrica** (que são: adição, multiplicação, raízes, potências).

– Valores absolutos criam **dificuldades algébricas** nas inferências estatísticas (regressão e análise da variância).

– **Viés:** desvios médios absolutos de amostras não tendem ao valor do desvio médio absoluto da população.

– Por isso, usamos o desvio padrão que transforma variações em valores não-negativos pela elevação ao quadrado.

POR QUE DIVIDIR POR *n* – 1?

– Dividimos o desvio padrão amostral por *n* – 1, porque há apenas *n* – 1 valores independentes.

– Ou seja, dada uma média, apenas *n* – 1 valores podem ser associados a qualquer número, antes que o último valor seja determinado.

– Além disso, se s^2 fosse definido como a divisão por *n*, ele sistematicamente subestimaria o valor de σ^2, o que é compensado pela diminuição do denominador.

– Vejam exercício 38 (pp. 88-89).

POR QUE EXTRAIR A RAIZ QUADRADA?

– Ao final do cálculo do desvio padrão, extraímos a raiz quadrada.

– Isso é realizado para compensar os quadrados que são estimados anteriormente.

– Ao calcular a raiz quadrada, o desvio padrão tem as mesmas unidades de medida dos dados originais.

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

– Por ter as mesmas unidades dos dados originais, o desvio padrão é mais fácil de entender do que a variância.

– Porém, com o desvio padrão, é difícil comparar a dispersão para valores de diferentes variáveis (ex.: peso e altura).

– **Coeficiente de variação** (CV) supera essa desvantagem, por não ter unidade específica, permitindo comparação das variações.

– O CV para um conjunto de dados amostrais ou populacionais não-negativos é expresso como um percentual e descreve o desvio padrão em relação à média:

  – Amostra: $CV = s/\bar{x} * 100\%$

  – População: $CV = \sigma/\mu * 100\%$

MEDIDAS DE POSIÇÃO RELATIVA

MEDIDAS DE POSIÇÃO RELATIVA

– As medidas de posição relativa permitem a comparação de valores de conjuntos de dados diferentes ou de valores dentro de um mesmo conjunto de dados.

– Os **escores *z*** permitem a comparação de valores de diferentes conjuntos de dados.

– Os **quartis** e **percentis** permitem a comparação de valores dentro do mesmo conjunto de dados, assim como entre diferentes conjuntos de dados.

ESCORES *z*

– Um escore *z* é obtido pela conversão de um valor para uma escala padronizada.

– O escore padronizado é o número de desvios padrões a que se situa determinado valor de *x*, acima ou abaixo da média:

– Amostra: $$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

– População: $$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ESCORES *z* E VALORES NÃO-USUAIS

– Valores não-usuais são aqueles com escores *z* menores do que –2,00 ou maiores do que +2,00.

– Valores comuns: $-2 \le$ escore $z \le 2$

– Valores não-usuais: escore $z < -2$ *ou* escore $z > 2$

– Sempre que um valor é menor do que a média, seu escore *z* correspondente é negativo.

– Escores *z* são medidas de posição, já que descrevem a localização de um valor (em termos de desvios padrões) em relação à média:

  – $z = 2$: valor está 2 desvios padrões acima da média.

  – $z = -3$: valor está 3 desvios padrões abaixo da média.

QUARTIS

– A **mediana** divide os dados ordenados em 2 partes iguais:

  – 50% dos valores de um conjunto de dados são iguais ou menores do que a mediana, e 50% são iguais ou maiores.

– Os **quartis (Q_1, Q_2 e Q_3)** dividem os valores ordenados em 4 partes iguais:

  – Q_1 (primeiro quartil): separa os 25% inferiores dos 75% superiores.

  – Q_2 (segundo quartil): mesmo que a mediana; separa os 50% inferiores dos 50% superiores.

  – Q_3 (terceiro quartil): separa os 75% inferiores dos 25% superiores.

PERCENTIS

– Há 99 **percentis ($\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$, ..., $\boldsymbol{P_{99}}$)** que dividem os dados ordenados em 100 grupos com cerca de 1% dos valores em cada um.

– Os quartis e percentis são exemplos de quantis, os quais dividem os dados em grupos com aproximadamente o mesmo número de valores.

– Utilize a seguinte fórmula, arredondando o resultado para o número inteiro mais próximo:

$$percentil\ de\ x = \frac{n^{\underline{o}}\ valores\ menores\ do\ que\ x}{n^{\underline{o}}\ total\ de\ valores} * 100$$

– Note que: $Q_1 = P_{25}$; $Q_2 = P_{50}$; $Q_3 = P_{75}$

CONVERTENDO PERCENTIS EM VALOR DE DADOS

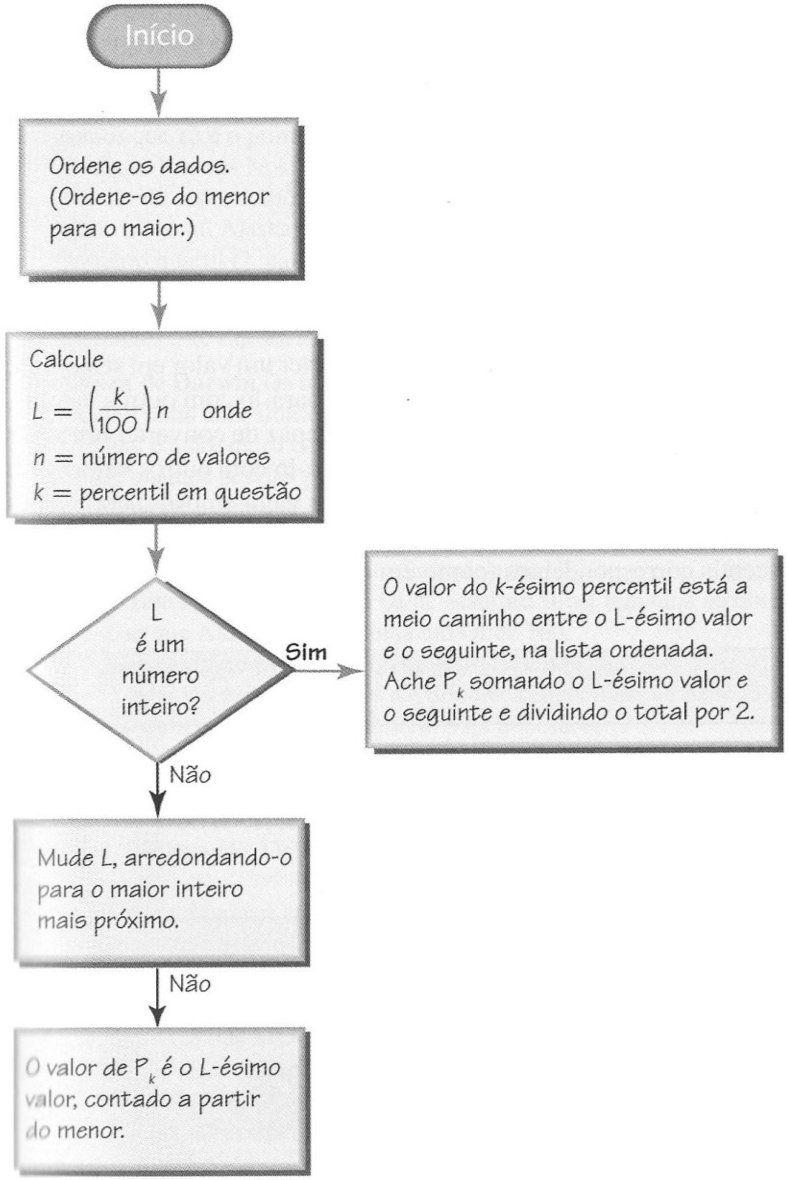


FIGURA 3-6 Conversão do k-ésimo Percentil no Valor de Dado Correspondente

– Sendo:
  – n: número total de valores no conjunto de dados.
  – k: percentil em uso (ex.: para o 25º percentil, k=25).
  – L: localizador que dá a posição de um valor (ex.: para o 12º valor na lista ordenada, L=12).
  – P_k: k-ésimo percentil (ex.: P_{25} é o 25º percentil).

ESTATÍSTICAS DEFINIDAS POR QUARTIS E PERCENTIS

– Intervalo interquartil (IIQ) = $Q_3 - Q_1$

– Intervalo semi-interquartil = $(Q_3 - Q_1) / 2$

– Ponto médio dos quartis = $(Q_3 + Q_1) / 2$

– Intervalo percentílico 10–90 = $\mathrm{P}_{90} - P_{10}$

ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS (AED)

ANÁLISE EXPLORATÓRIA DE DADOS (AED)

– Análise exploratória de dados é o processo de uso das ferramentas estatísticas (gráficos, medidas de centro, medidas de variação...) para investigação de conjuntos de dados com objetivo de se compreenderem suas características importantes.

– Podemos explorar características dos dados: centro (média, mediana); variação (desvio padrão, amplitude), distribuição (histogramas); *outliers*; mudança no tempo.

– Aqui serão discutidos os valores discrepantes (*outliers*) e o diagrama de caixa (*boxplot*).

VALORES DISCREPANTES (*OUTLIERS*)

– Valor *outlier* (valor extremo) é aquele que se localiza muito afastado de quase todos os demais valores.

– Estes valores podem ter efeito dramático sobre:

- – A média.
- – O desvio padrão.
- – A escala do histograma, de modo que a verdadeira natureza da distribuição pode ser totalmente obscurecida.

– *Outliers* podem ser erros: devem ser corrigidos ou ignorados

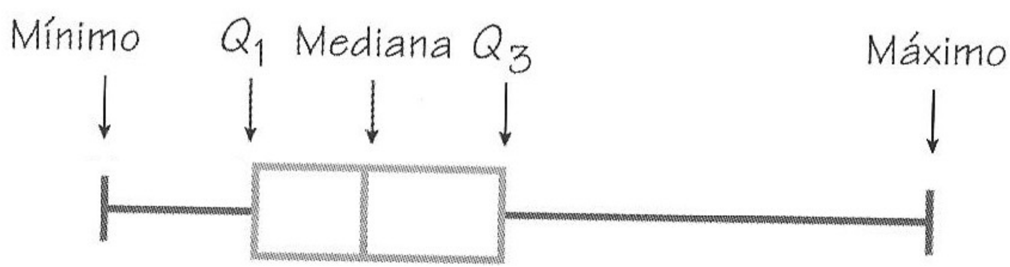
– *Outliers* podem ser corretos: devemos estudar seus efeitos, construindo gráficos e calculando estatísticas, com e sem *outliers*, buscando revelar importantes informações.

DIAGRAMAS DE CAIXA (*BOXPLOTS*)

– Para um conjunto de dados, o **resumo dos cinco números** consiste no valor mínimo, primeiro quartil (Q_1), mediana (Q_2), terceiro quartil (Q_3) e no valor máximo.

– **Diagrama de caixa** (diagrama de caixa e bigode) é um gráfico de um conjunto de dados que consiste em: (1) uma linha que se estende do valor mínimo ao valor máximo; (2) uma caixa com linhas traçadas no primeiro quartil (Q_1), na mediana (Q_2) e no terceiro quartil (Q_3).

– Os diagramas de caixa são úteis para revelar centro, dispersão, distribuição e *outliers*.

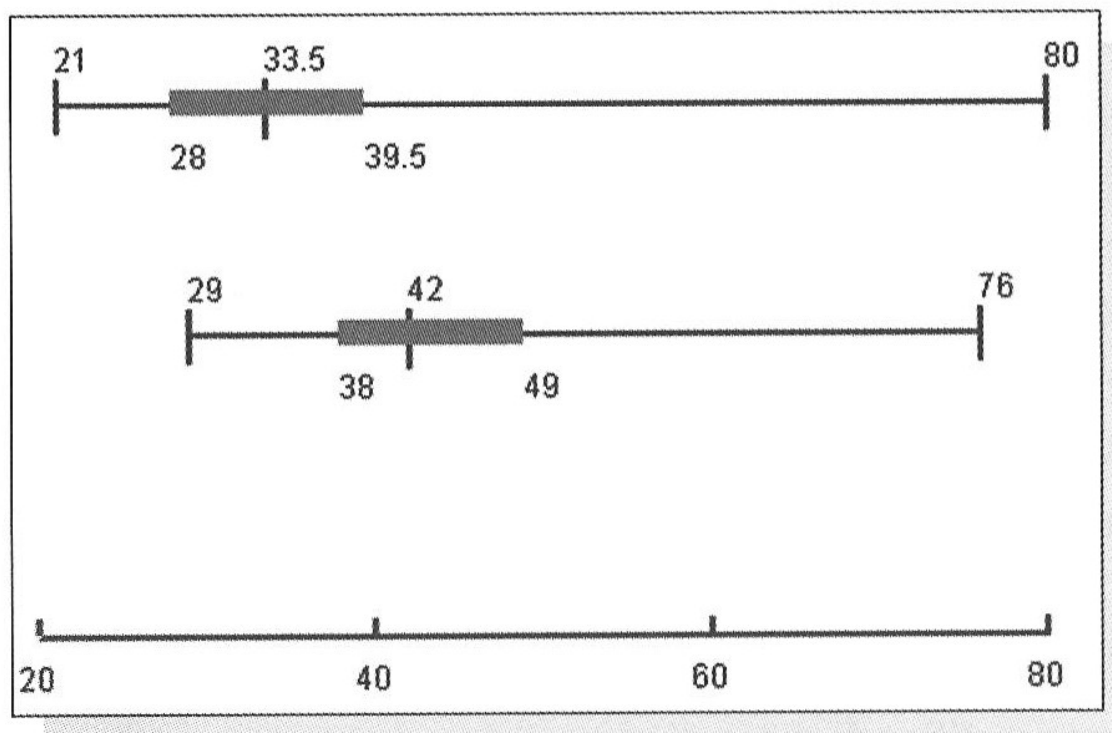


UTILIDADE DOS DIAGRAMAS DE CAIXA

– Diagramas de caixa não apresentam informação tão detalhada como histogramas e digramas de ramo e folhas.

– Porém, são úteis na comparação de dois ou mais conjuntos de dados, quando desenhados na mesma escala.

– *Boxplots* para idades dos melhores atores e atrizes:



Atrizes

Atores

DIAGRAMAS DE CAIXA MODIFICADOS

– Diagramas de caixa modificados representam *outliers* com símbolos especiais (asteriscos).

– Lembrando que $IIQ = Q_3 – Q_1$, um valor é *outlier* se está:

– Acima de Q_3 por uma quantidade maior do que 1,5 x IIQ.

ou

– Abaixo de Q_1 por uma quantidade maior do que 1,5 x IIQ.

– A linha sólida horizontal se estende apenas até o menor valor dos dados que não são *outliers* e até o maior valor dos dados que não são *outliers*.