

AULA 10

Estimativas e

Tamanhos Amostrais

Ernesto F. L. Amaral

08 de setembro de 2011
Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)

Fonte:

Triola, Mario F. 2008. “Introdução à estatística”. 10^a ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 7 (pp.250-303).

ESQUEMA DA AULA

- Estimação da proporção populacional.
- Estimação da média populacional: σ conhecido.
- Estimação da média populacional: σ desconhecido.
- Estimação da variância populacional.

OBJETIVO DO CAPÍTULO

- Neste capítulo, são usados dados amostrais para obter estimativas de parâmetros populacionais, o que é a essência da inferência estatística.
- As duas principais aplicações da inferência estatística envolvem o uso de dados amostrais para:
 - Estimar o valor de um parâmetro populacional (proporções, médias, variâncias).
 - Testar alguma afirmação (ou hipótese) sobre uma população.
- São ainda apresentados métodos para determinação dos tamanhos amostrais necessários para estimar esses parâmetros.

ESTIMAÇÃO DA PROPORÇÃO POPULACIONAL

ESTIMAÇÃO DA PROPORÇÃO POPULACIONAL

- A intenção é de usar uma proporção amostral para estimar o valor de uma proporção populacional com um intervalo de confiança.
- São apresentados métodos para encontrar o tamanho da amostra necessário para estimar a proporção populacional.
- É importante:
 - Entender o que são, o que fazem e por que são necessários os intervalos de confiança.
 - Desenvolver a habilidade de construir estimativas de intervalos de confiança de proporções populacionais.
 - Aprender como interpretar corretamente um intervalo de confiança.

REQUISITOS

- Serão considerados casos em que distribuição normal pode ser usada para aproximar distribuição amostral de proporções amostrais.
- Requisitos para métodos de estimação de proporções:
 - É utilizada amostra aleatória simples.
 - Condições para distribuição binomial são satisfeitas: (1) número fixo de tentativas; (2) tentativas independentes; (3) duas categorias de resultados; e (4) probabilidades permanecem constantes para cada tentativa.
 - Há pelo menos 5 sucessos e pelo menos 5 fracassos. Essa exigência é uma forma de garantir que $np \geq 5$ e $nq \geq 5$, permitindo usar distribuição normal como aproximação para a distribuição binomial.

NOTAÇÃO PARA PROPORÇÕES

- p = proporção populacional.
- $\hat{p} = x/n$ = proporção amostral de x sucessos em uma amostra de tamanho n .
- $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ = proporção amostral de fracassos em uma amostra de tamanho n .
- Esta seção se concentra na proporção populacional p , que é o mesmo que trabalhar com probabilidades e porcentagens.
- Expresse porcentagens em forma decimal.

ESTIMATIVA PONTUAL

- Se desejamos estimar proporção populacional com único valor, a melhor estimativa é \hat{p} (estimativa pontual).
- Estimativa pontual é um único valor usado para aproximar um parâmetro populacional.
- Proporção amostral \hat{p} é a melhor estimativa pontual da proporção populacional p .
- A estimativa pontual é usada porque é não-viesado e é o mais consistente dos estimadores que poderiam ser usados:
 - Distribuição das proporções amostrais tende a centralizar em torno do valor de p .
 - Proporções amostrais não subestimam/superestimam p .
 - Desvio padrão das proporções amostrais tende a ser menor do que desvios padrões de outros estimadores.

POR QUE USAR INTERVALOS DE CONFIANÇA?

- Como a estimativa pontual não diz o quão precisa ela é, os estatísticos desenvolveram o intervalo de confiança (estimativa intervalar).
- **Intervalo de confiança (IC)** é uma faixa (ou intervalo) de valores usada para estimar o verdadeiro valor de um parâmetro populacional.
- A um intervalo de confiança é associado um nível de confiança, por exemplo, 0,95 (ou 95%).
- O **nível de confiança (NC)** apresenta a taxa de sucesso do procedimento usado para construir o intervalo de confiança.
- Nível de confiança é expresso como probabilidade ou área $(1-\alpha)$, em que α é o complemento do nível de confiança.
- Quanto maior o NC, maior o IC.

NÍVEL DE CONFIANÇA

- **Nível de confiança** (grau de confiança ou coeficiente de confiança) é a proporção de vezes que o intervalo de confiança realmente contém o parâmetro populacional, supondo que processo seja repetido várias vezes.
- As escolhas mais comuns para nível de confiança são 90% ($\alpha = 0,10$), 95% ($\alpha = 0,05$) e 99% ($\alpha = 0,01$).
- Escolha de 95% é mais comum porque resulta em bom equilíbrio entre **precisão** (largura do intervalo de confiança) e **confiabilidade** (nível de confiança).
- Precisão (exatidão) é a qualidade de que o resultado da amostra reflita o mundo real.
- Confiabilidade é a qualidade de uma determinada técnica produzir os mesmos resultados em várias aplicações.

INTERPRETAÇÃO DE INTERVALO DE CONFIANÇA

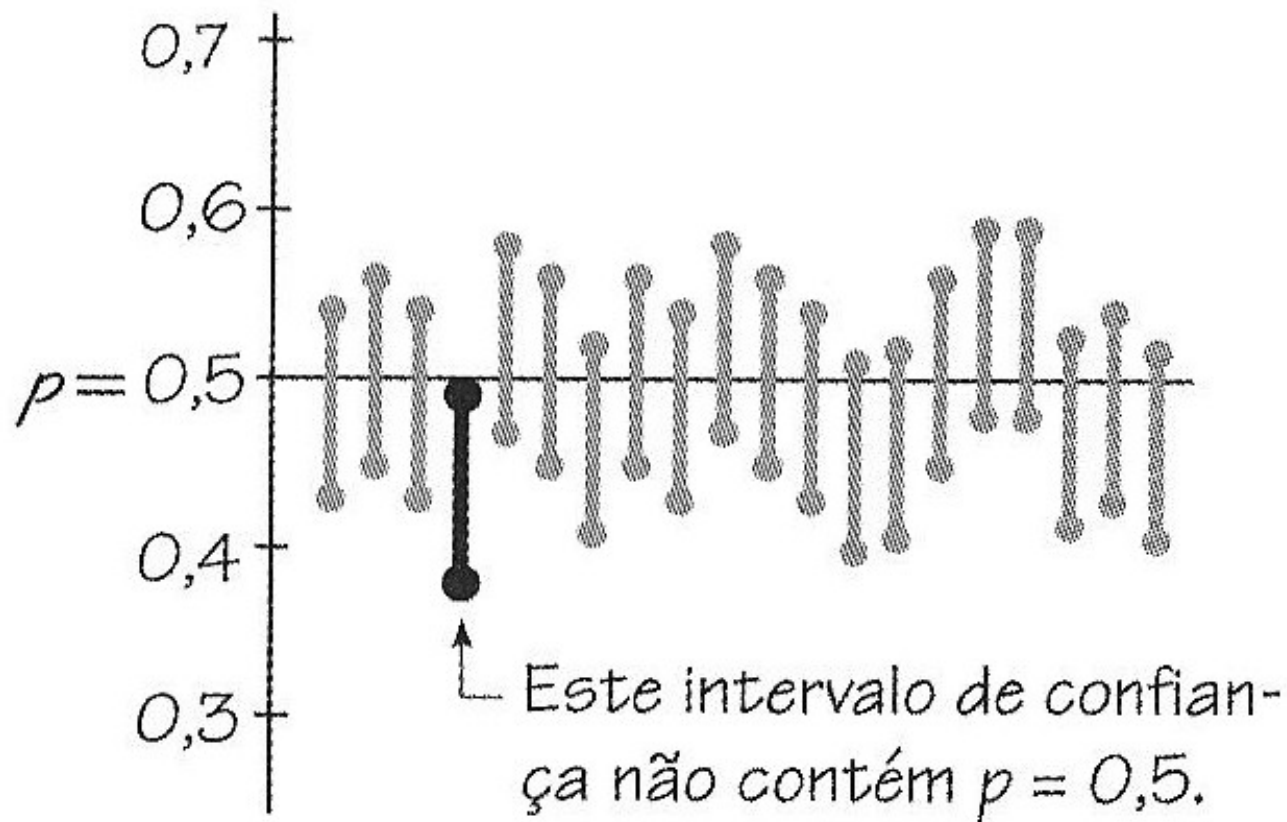
- Por exemplo: $n = 280$; $0,381 < p < 0,497$.
- **Correto:** estamos 95% confiantes de que o intervalo de 0,381 a 0,497 realmente contém o verdadeiro valor de p .
 - Se seleccionássemos muitas diferentes amostras de tamanho 280 e construíssemos os intervalos de confiança correspondentes, 95% deles realmente conteriam o valor da proporção populacional p .
 - O nível de 95% se refere à taxa de sucesso do processo em uso para se estimar a proporção populacional, e não se refere à própria proporção populacional.
- **Errado:** como o valor de p é fixo, é incorreto dizer que há uma chance de 95% de que o verdadeiro valor de p esteja entre 0,381 e 0,497.

INTERPRETAÇÃO DE INTERVALO DE CONFIANÇA

- Em qualquer ponto no tempo, há um valor de p fixo e constante, e um intervalo de confiança construído a partir de uma amostra que inclui ou não inclui p .
- O valor de p é fixo, de modo que os limites do intervalo de confiança ou contêm ou não contêm p , e é por isso que é errado dizer que há uma chance de 95% de que p esteja entre valores como 0,381 e 0,497.
- Um nível de confiança de 95% diz que o processo resultará, a longo prazo, em limites de intervalo de confiança que contenham a verdadeira proporção populacional 95% das vezes.

EXEMPLO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA

- Intervalos de confiança a partir de 20 amostras diferentes.
- Com 95% de confiança, esperamos que 19 das 20 amostras resultem em intervalos de confiança que realmente contenham o verdadeiro valor de p .

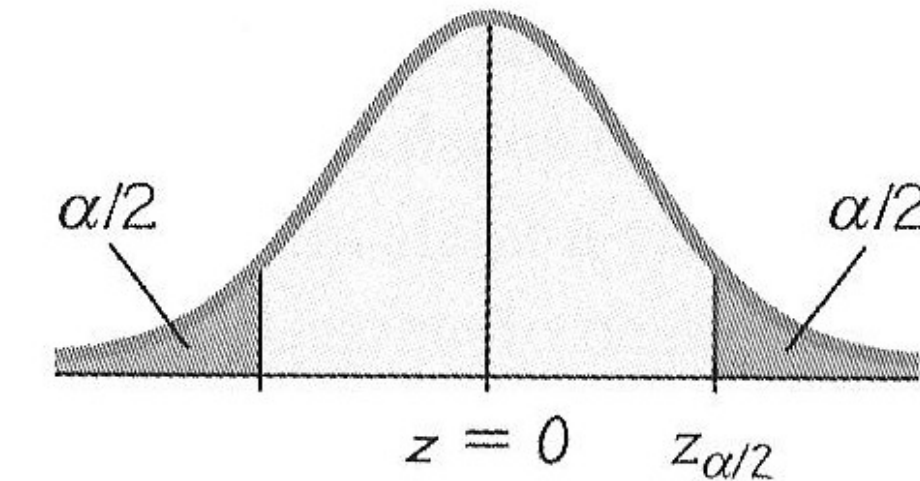


VALORES CRÍTICOS

- O escore padrão z ou valor crítico ($z_{\alpha/2}$) separa proporções amostrais que têm chance de ocorrer das que não têm.
- Os valores críticos se baseiam nestas observações:
 - A distribuição amostral das proporções amostrais pode ser aproximada por uma distribuição normal.
 - Proporções amostrais têm uma chance relativamente pequena de cair em uma das caudas da curva normal.
 - Representando cada cauda por $\alpha/2$, há uma probabilidade total α de que uma proporção amostral caia em uma das duas caudas.
 - Há uma probabilidade de $1-\alpha$ de que uma proporção amostral caia na região entre os pontos críticos (+ e –).

VALORES CRÍTICOS NA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

- Valor crítico é um número que separa estatísticas amostrais que têm chance de ocorrer daquelas que não têm.
- O número $z_{\alpha/2}$ é um valor crítico que separa uma área $\alpha/2$ na cauda direita da distribuição normal padronizada.



Encontrado a partir
da Tabela A-2

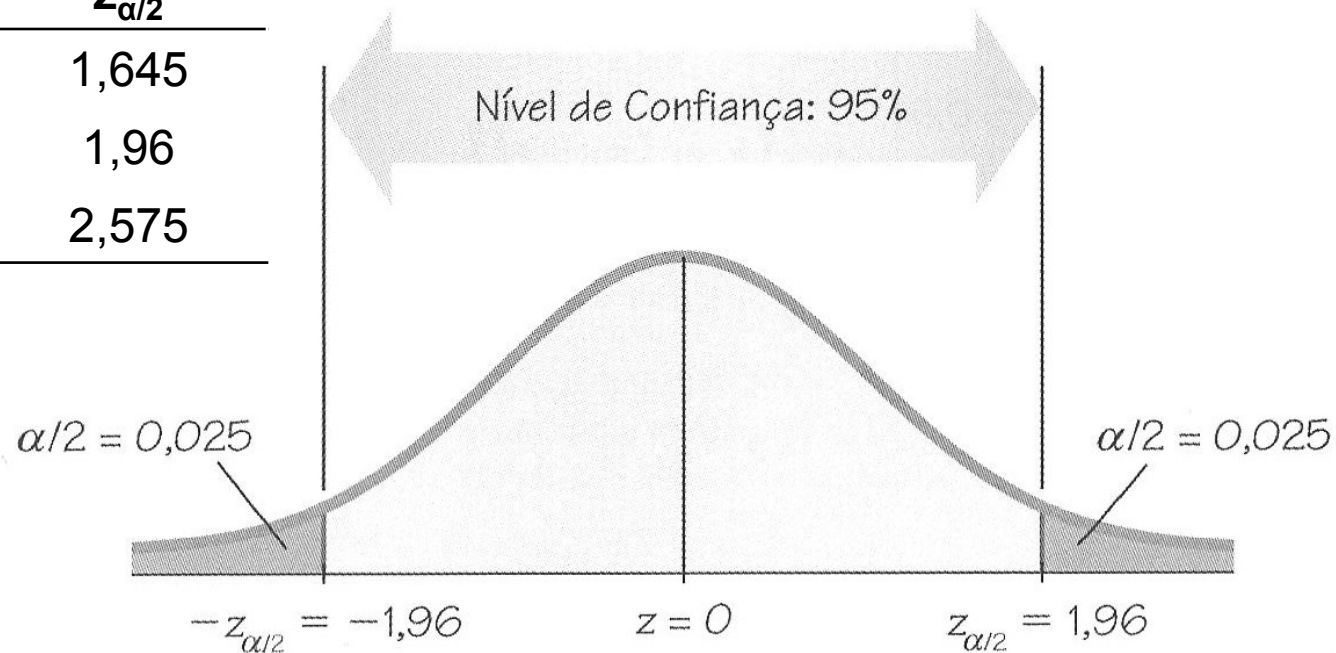
(corresponde à área
de $1 - \alpha/2$)



MAIS SOBRE VALORES CRÍTICOS

- O valor de $z_{\alpha/2}$ está na fronteira da cauda direita e o valor de $-z_{\alpha/2}$ está na fronteira da cauda da esquerda.
- Encontrando $z_{\alpha/2}$ para um nível de confiança específico...

Nível de confiança	α	Valor crítico $z_{\alpha/2}$
90%	0,10	1,645
95%	0,05	1,96
99%	0,01	2,575



A área total à esquerda desta fronteira é 0,975.

MARGEM DE ERRO

- Quando coletamos um conjunto de dados amostrais, podemos calcular a proporção amostral, a qual é tipicamente diferente da proporção populacional.
- A **margem de erro** (E) é a diferença máxima provável entre a proporção amostral observada e o verdadeiro valor da proporção populacional:
 - Isso ocorre quando dados de amostra aleatória simples são usados para estimar uma proporção populacional.
 - É também chamada de erro máximo da estimativa.
 - É encontrada pela multiplicação do valor crítico pelo desvio padrão das proporções amostrais.

MARGEM DE ERRO E INTERVALO DE CONFIANÇA

- Margem de erro para proporções é calculada por:

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

- Há uma probabilidade α de que a proporção amostral tenha erro maior do que E .

- Ou seja, \hat{p} terá probabilidade de $1 - \alpha$ de estar a:

$$z_{\alpha/2} \sqrt{pq/n} \text{ de } p.$$

- Intervalo de confiança para proporção populacional é

$$\text{representado por: } \hat{p} - E < p < \hat{p} + E$$

$$\hat{p} \pm E$$

$$(\hat{p} - E; \hat{p} + E)$$

CONSTRUÇÃO DE INTERVALO DE CONFIANÇA

- Verifique se requisitos são satisfeitos: (1) amostra aleatória simples; (2) condições para distribuição binomial (tentativas fixas, independentes, duas categorias, probabilidade constante); e (3) há pelo menos 5 sucessos e 5 fracassos.
- Ache o valor crítico que corresponde ao nível de confiança desejado. Se nível de confiança é 95%, $z_{\alpha/2} = 1,96$.

- Calcule a margem de erro:

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$$

- Use o valor da margem de erro e o valor da proporção amostral para encontrar o intervalo de confiança:

$$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$$

- Arredonde os limites do intervalo de confiança.

EXEMPLO DE CÁLCULO

– Por exemplo, em 280 tentativas, houve 123 acertos:

$$- n = 280$$

$$- \hat{p} = 123/280 = 0,439286$$

$$- \hat{q} = 1 - 0,439286 = 0,560714$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{(0,439286)(0,560714)}{280}} = 0,058133$$

$$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$$

$$0,439286 - 0,058133 < p < 0,439286 + 0,058133$$

$$0,381 < p < 0,497$$

– A taxa de sucesso é de 44%, com margem de erro de mais ou menos 6% e nível de confiança de 95% (geralmente resultados eleitorais omitem o nível de confiança).

FUNDAMENTOS PARA MARGEM DE ERRO

- Distribuição amostral das proporções é aproximadamente normal ($np \geq 5$ e $nq \geq 5$).
- Parâmetros da média e desvio padrão são relativos a n tentativas e são convertidos para a base por 1 tentativa pela divisão por n .
- Média das proporções amostrais:

$$\mu = \frac{np}{n} = p$$

- Desvio padrão das proporções amostrais:

$$\sigma = \frac{\sqrt{npq}}{n} = \sqrt{\frac{npq}{n^2}} = \frac{\sqrt{pq}}{n} = \frac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{n}$$

COMO DEFINIR O TAMANHO AMOSTRAL?

- Utilizando a fórmula da margem de erro, chegamos a:

$$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \hat{p}\hat{q}}{E^2}$$

- Se não conhecemos qualquer estimativa \hat{p} :

$$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 0,5 * 0,5}{E^2} = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 0,25}{E^2}$$

- Se o tamanho amostral calculado não for um número inteiro, arredonde-o para o inteiro maior mais próximo.
- Quando a amostragem é sem reposição, a partir de uma população finita relativamente pequena, utilize:

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 N \hat{p}\hat{q}}{\hat{p}\hat{q}[z_{\alpha/2}]^2 + (N-1)E^2}$$

TAMANHO DA POPULAÇÃO

– Para o cálculo do tamanho da amostra, o tamanho da população é usado somente em casos em que fazemos amostragem sem reposição a partir de uma população relativamente pequena.

– Outras observações:

– Se margem de erro desejada igual a 5%, $E=0,05$.

– Se nível de confiança desejada é de 95%, $z_{\alpha/2}=1,96$.

– Assim:

$$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \cdot 0,25}{E^2} = \frac{(1,96)^2 * 0,25}{(0,05)^2} = \frac{0,9604}{0,025} = 384,16 \approx 385$$

DETERMINAÇÃO DE ESTIMATIVA PONTUAL E DE “E”

– Se conhecemos os limites do intervalo de confiança, a proporção amostral e a margem de erro podem ser encontradas desta forma:

– Estimativa pontual de p :

$$\hat{p} = \frac{(\text{limite de confiança superior}) + (\text{limite de confiança inferior})}{2}$$

– Margem de erro:

$$E = \frac{(\text{limite de confiança superior}) - (\text{limite de confiança inferior})}{2}$$

INTERVALO DE CONFIANÇA AJUSTADO DE WALD

- O intervalo de confiança ajustado de Wald tem um melhor desempenho por ter maior probabilidade de conter a verdadeira proporção populacional.
- Acrescente 2 ao número de sucessos x , acrescente 2 ao número de fracassos e , então, calcule o intervalo de confiança.
- Se $x=10$ e $n=20$:
 - Intervalo usual: $0,281 < p < 0,719$
 - Intervalo ajustado de Wald com $x=12$ e $n=24$:
 $0,300 < p < 0,700$
- A chance de que o intervalo $0,300 < p < 0,700$ contenha p é mais próxima de 95% do que a chance de $0,281 < p < 0,719$.

INTERVALO DE CONFIANÇA DO ESCORE DE WILSON

– Limite inferior do intervalo de confiança:

$$\frac{\hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n}}{n}}}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}}$$

– O limite superior do intervalo de confiança se expressa pela mudança do sinal negativo pelo sinal positivo:

$$\frac{\hat{p} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n}}{n}}}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}}$$

– Usando $x=10$ e $n=20$, o intervalo de confiança do escore de Wilson é $0,290 < p < 0,701$.

**ESTIMAÇÃO DA MÉDIA POPULACIONAL:
 σ CONHECIDO**

ESTIMAÇÃO DA MÉDIA POPULACIONAL: σ CONHECIDO

- Aqui são apresentados métodos para usar dados amostrais para se encontrar estimativa pontual e intervalo de confiança para uma **média populacional**.
- Requisitos:
 - Amostra aleatória simples (todas amostras de mesmo tamanho têm igual chance de serem selecionadas).
 - Valor do desvio padrão populacional (σ) é conhecido.
 - Uma ou ambas as condições seguintes são satisfeitas: população é normalmente distribuída ou $n > 30$.
- Se $n \leq 30$, a população não precisa ter uma distribuição exatamente normal, mas deve ser próxima da normal.
- Os métodos dessa seção são robustos, não sendo fortemente afetados por afastamentos da normalidade.

SUPOSIÇÃO DE TAMANHO AMOSTRAL REQUERIDO

- Distribuição normal é utilizada como distribuição das médias amostrais.
- Se população original não é normalmente distribuída, as médias de amostras com $n > 30$ têm uma distribuição próxima da normal.
- Não é possível identificar tamanho amostral mínimo que seja suficiente para todos casos.
- Tamanho amostral mínimo depende de como distribuição populacional se afasta de uma normal.
- É utilizado o critério simplificado de $n > 30$ como justificativa para tratar distribuição das médias amostrais como distribuição normal.

MELHOR ESTIMATIVA DA MÉDIA POPULACIONAL

- A média amostral \bar{x} é a melhor estimativa pontual da média populacional μ .
- Para todas populações, a média amostral é um estimador não-viesado da média populacional.
 - A distribuição das médias amostrais tende a se centralizar em torno do valor da média populacional.
 - Médias amostrais não tendem a superestimar ou subestimar o valor populacional.
- Para muitas populações, a distribuição das médias amostrais tende a ser mais consistente (menos variação) do que as distribuições de outras estatísticas amostrais.

INTERVALO E NÍVEL DE CONFIANÇA, MARGEM DE ERRO

- O **intervalo de confiança** permite compreender melhor a precisão da estimativa da média amostral.
- Este intervalo está associado a um **nível de confiança**, o qual indica a taxa de sucesso do procedimento usado para construção do intervalo (confiabilidade).
- Diferença entre a média amostral e a média populacional é um erro.
- **Margem de erro** para a média, baseada em σ conhecido:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Com isso, calculamos os limites do intervalo de confiança:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E \quad \text{ou} \quad \bar{x} \pm E \quad \text{ou} \quad (\bar{x} - E; \bar{x} + E)$$

CONSTRUÇÃO DE INTERVALO DE CONFIANÇA

- Verifique se: (1) temos uma amostra aleatória simples; (2) σ é conhecido; e (3) população parece ser normal ou $n > 30$.
- Encontre o valor crítico $z_{\alpha/2}$ que corresponde ao nível desejado de confiança (se nível de confiança=95%, $z=1,96$).
- Calcule margem de erro: $E = z_{\alpha/2} * \sigma/\sqrt{n}$
- Com valor da margem de erro e valor da média, ache valores dos limites do intervalo de confiança:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

- Ao usar o conjunto original de dados, arredonde limites do intervalo para uma casa decimal a mais do que as originais.
- Ao usar estatísticas-resumo, arredonde limites para mesmo número de casas decimais usados na média amostral.

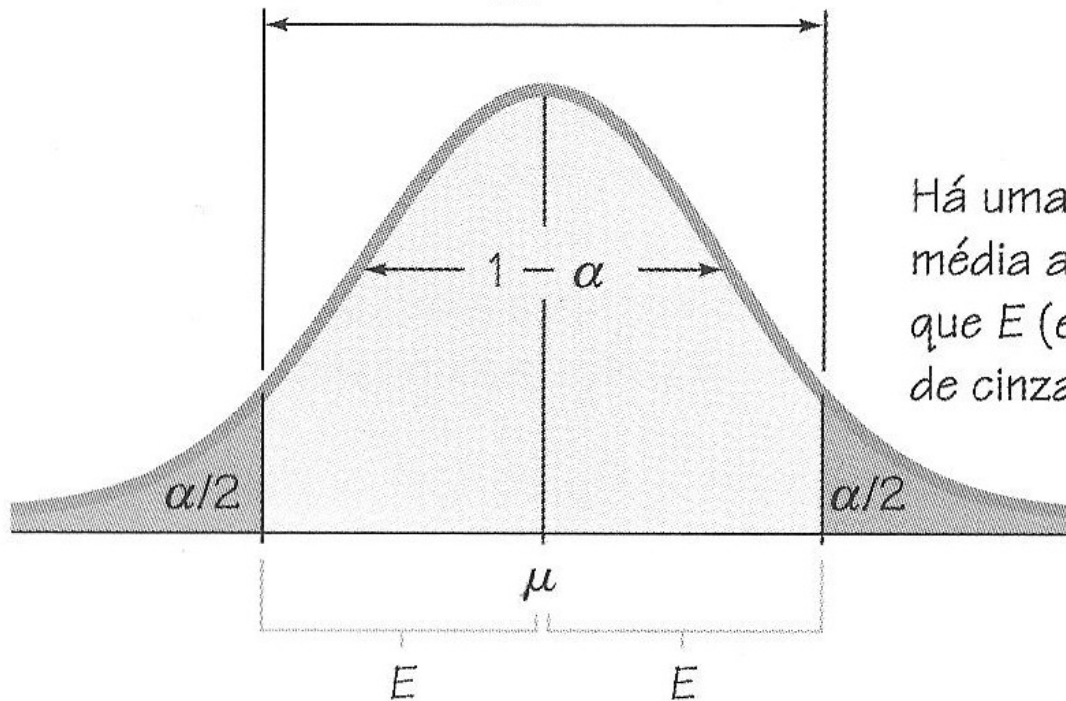
INTERPRETANDO UM INTERVALO DE CONFIANÇA

- Se temos $72,4 < \mu < 80,2$ com intervalo de confiança de 95%:
- **Correto:**
 - Estamos 95% confiantes de que o intervalo de 72,4 a 80,2 realmente contenha o verdadeiro valor de μ .
 - Se selecionamos muitas amostras diferentes de mesmo tamanho e construímos os intervalos de confiança correspondentes, 95% deles realmente conterão μ .
 - Essa é a taxa de sucesso do processo usado para estimar média populacional.
- **Errado:**
 - Como μ é constante fixa, é errado dizer que há uma chance de 95% de que μ esteja entre 72,4 e 80,2.
 - 95% das médias amostrais estão entre 72,4 e 80,2.

DISTRIBUIÇÃO DE MÉDIAS AMOSTRAIS

- Distribuição de médias amostrais com σ conhecido.

Há uma probabilidade $1 - \alpha$ de que uma média amostral tenha um erro menor do que E ou $z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$



Há uma probabilidade α de que uma média amostral tenha um erro maior que E (em uma das caudas sombreadas de cinza-escuro)

FUNDAMENTOS PARA INTERVALO DE CONFIANÇA

- Construção de intervalos de confiança está baseada no teorema central do limite, que diz que:
 - ao coletar amostras aleatórias simples de mesmo tamanho de uma população distribuída normalmente...
 - ... as médias amostrais são normalmente distribuídas com média μ e desvio padrão σ/\sqrt{n} .
- Formato do intervalo de confiança vem de equação do TCL:
 - Utilize: $z = (\bar{x} - \mu_{\bar{x}}) / \sigma_{\bar{x}}$; $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$; $\mu_{\bar{x}} = \mu$.
 - Para obter: $\mu = \bar{x} \pm z(\sigma / \sqrt{n})$.
- O uso de valores positivo e negativo de z resulta nos limites do intervalo de confiança com que estamos trabalhando.
- Com NC=95%, há probabilidade de 0,05 da média amostral estar a mais ou a menos de 1,96 DP da média populacional.

TAMANHO AMOSTRAL PARA ESTIMAR MÉDIA μ

- Determinação do tamanho de amostra aleatória simples é importante, porque amostras grandes gastam tempo e dinheiro, e amostras pequenas levam a resultados imprecisos.
- Fórmula do tamanho amostral não depende do tamanho da população (N):

$$n = \left[\frac{Z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right]^2$$

- $Z_{\alpha/2}$ = escore z crítico com base no nível de confiança.
- E = margem de erro desejada.
- σ = desvio padrão populacional.
- Caso de amostra sem reposição de população finita:

$$n = \frac{N \sigma^2 (z_{\alpha/2})^2}{(N - 1) E^2 + \sigma^2 (z_{\alpha/2})^2}$$

LIDANDO COM σ DESCONHECIDO

- Geralmente o desvio padrão populacional é desconhecido.
- Use a **regra empírica da amplitude** para estimar o desvio padrão ($\sigma \approx \text{amplitude}/4$).
 - Esse valor é maior ou igual ao real σ pelo menos 95% das vezes.
- Realize **estudo piloto**: comece processo de coleta da amostra e com base nos primeiros valores, calcule o desvio padrão amostral (s) e use-o no lugar de σ .
 - Esse valor pode ser melhorado à medida que mais dados são obtidos.
- Estime valor de σ com resultados de **estudos anteriores**.
- Ao calcular n , **erros devem ser conservadores**, no sentido de aumentar tamanho amostral em vez de diminuir.

**ESTIMAÇÃO DA MÉDIA POPULACIONAL:
 σ DESCONHECIDO**

ESTIMAÇÃO DA MÉDIA POPULACIONAL: σ DESCONHECIDO

- São apresentados métodos para determinar intervalo de confiança de média populacional quando o desvio padrão da população não é conhecido.
- Requisitos:
 - Amostra aleatória simples (todas amostras de mesmo tamanho têm igual chance de serem selecionadas).
 - Amostra provém de população normalmente distribuída ou $n > 30$.
- Uma população pode ser considerada normalmente distribuída se dados amostrais não tiverem valores extremos (*outliers*) e histograma for próximo de normal.
- O tamanho da amostra depende de quanto a distribuição se afasta de uma distribuição normal.

MELHOR ESTIMATIVA DA MÉDIA POPULACIONAL

- A média amostral \bar{x} continua sendo a melhor estimativa pontual da média populacional μ .
- Se σ não é conhecido, mas requisitos são satisfeitos, usamos **distribuição t de Student** (em vez de distribuição normal).
- O valor de σ é estimado com o valor do desvio padrão amostral (s), mas isso introduz fonte de não-confiabilidade, principalmente quando amostras são pequenas.
- Isso é compensado fazendo o intervalo de confiança um pouco mais largo, com os valores críticos $t_{\alpha/2}$ que são maiores do que os valores críticos $z_{\alpha/2}$.

DISTRIBUIÇÃO t DE STUDENT

- Se uma população tem distribuição normal, então a distribuição t de Student para todas amostras de tamanho n é representada por:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- Para encontrar o valor crítico de $t_{\alpha/2}$, precisamos saber o número apropriado de graus de liberdade.
- O número de **graus de liberdade** para um conjunto de dados amostrais é o número de valores amostrais que podem variar depois que certas restrições (como a média) tiverem sido impostas aos dados amostrais:

$$\text{graus de liberdade} = n - 1$$

EXEMPLO

- Uma amostra de tamanho $n=23$ é uma amostra aleatória simples selecionada de uma população normalmente distribuída. Ache o valor crítico $t_{\alpha/2}$ correspondente a um nível de confiança de 95%.
- No Stata:
 - $di\ invttail(n,\alpha/2) = di\ invttail(23,0.025) = 2.0686576 = t_{\alpha/2}$
- Se tivéssemos $n=23$ e $t_{\alpha/2}=2.07$, podemos calcular $\alpha/2$:
 - $di\ ttail(n,t_{\alpha/2}) = di\ ttail(23,2.07) = 0.02493172 = \alpha/2$

MARGEM DE ERRO E INTERVALO DE CONFIANÇA

- Para calcular margem de erro E para estimativa de μ com σ desconhecido, onde $t_{\alpha/2}$ tem $n-1$ graus de liberdade:

$$E = t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- Intervalo de confiança para estimativa de μ com σ desconhecido:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

CONSTRUÇÃO DE INTERVALO DE CONFIANÇA

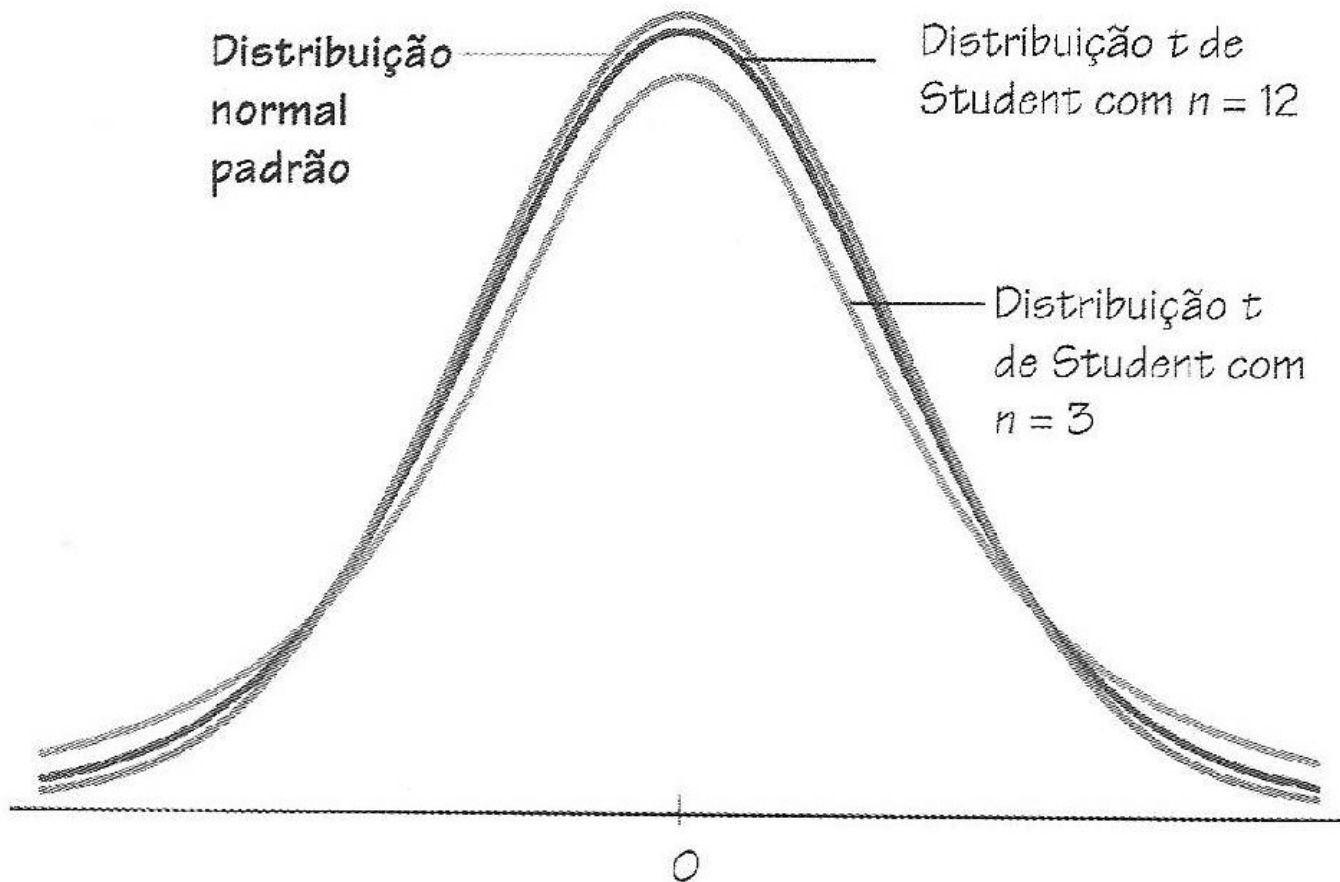
- Verifique se os requisitos são satisfeitos: (1) amostra aleatória simples; e (2) população próxima de distribuição normal ou $n > 30$.
- Usando $n-1$ graus de liberdade, ache valor crítico $t_{\alpha/2}$, correspondente ao nível de confiança.
- Calcule margem de erro: $E = t_{\alpha/2} s / \sqrt{n}$
- Use valor da margem de erro e valor da média amostral e ache os valores dos limites do intervalo de confiança:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

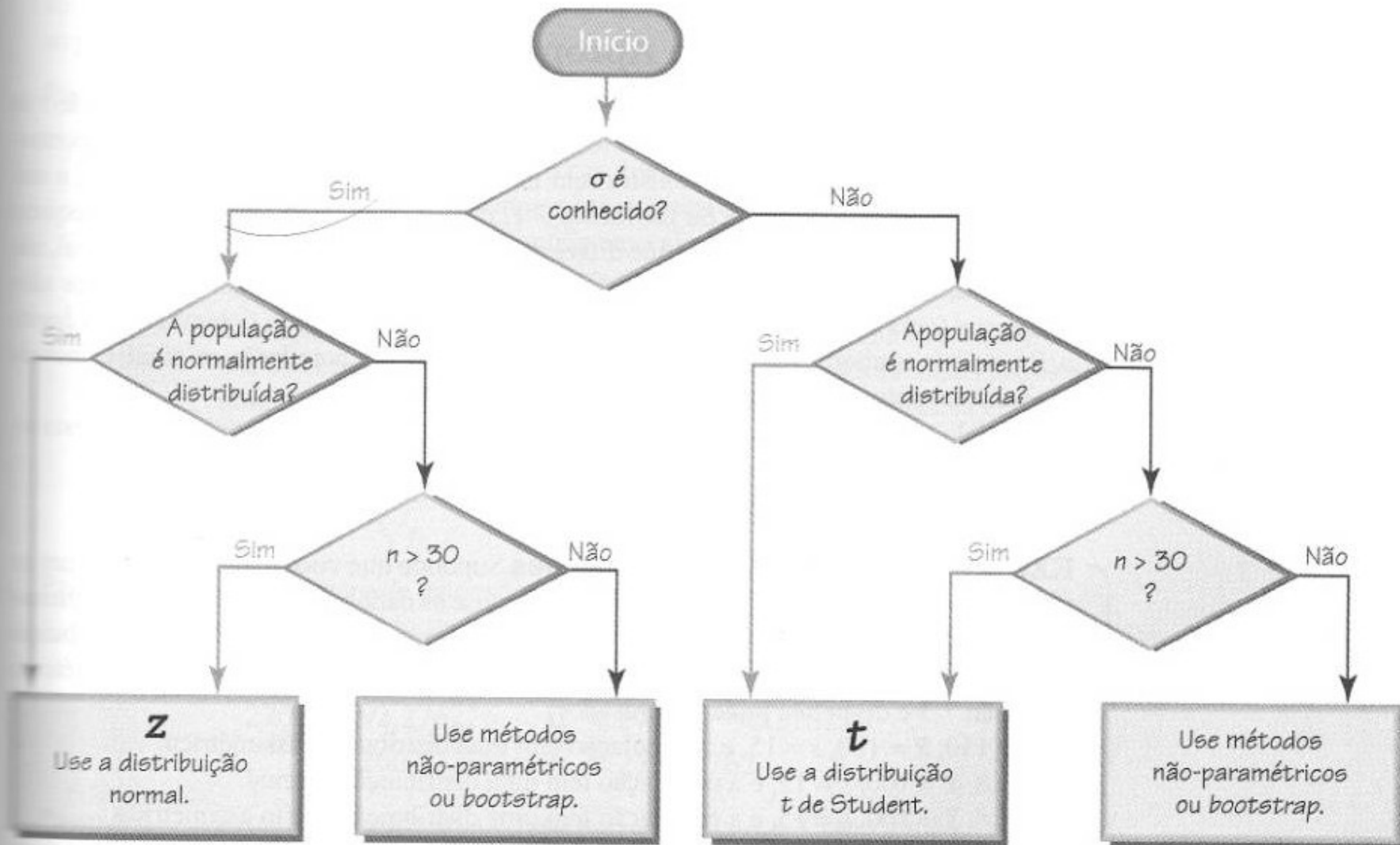
- Arredonde os limites do intervalo de confiança resultante.

DISTRIBUIÇÃO t DE STUDENT PARA $n=3$ E $n=12$

- Distribuição t de Student tem a mesma forma geral da distribuição normal padrão, mas reflete a maior variabilidade que se espera com amostras pequenas.



ESCOLHA DA DISTRIBUIÇÃO APROPRIADA



- Métodos não-paramétricos e *bootstrap* não fazem suposições sobre população original.

DETERMINAÇÃO DE ESTIMATIVA PONTUAL E DE “E”

– Se conhecemos os limites do intervalo de confiança, a média amostral e a margem de erro podem ser encontradas desta forma:

– Estimativa pontual de μ :

$$\bar{x} = \frac{(\text{limite de confiança superior}) + (\text{limite de confiança inferior})}{2}$$

– Margem de erro:

$$E = \frac{(\text{limite de confiança superior}) - (\text{limite de confiança inferior})}{2}$$

USO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA

- Intervalo de confiança pode ser usado para:
 - Estimar o valor de um parâmetro populacional.
 - Descrever, explorar ou comparar conjuntos de dados.

```
. proportion x001
```

```
Proportion estimation                Number of obs    =    79946
```

	Proportion	Std. Err.	[95% Conf. Interval]	
x001				
male	.4969604	.0017683	.4934945	.5004264
female	.5030396	.0017683	.4995736	.5065055

- Porém, intervalos de confiança não devem ser usados para se tirarem conclusões finais sobre igualdade de médias.

ESTIMAÇÃO DA VARIÂNCIA POPULACIONAL

ESTIMAÇÃO DA VARIÂNCIA POPULACIONAL

- São apresentados métodos para:
 - Encontrar intervalo de confiança para um desvio padrão ou variância populacional.
 - Determinar tamanho amostral necessário para estimativa do desvio padrão (σ) ou variância populacional (σ^2).
- Requisitos:
 - Amostra aleatória simples.
 - População deve ter valores normalmente distribuídos, mesmo que amostra seja grande.
- Afastamento da distribuição normal pode levar a erros grosseiros.
- Distribuição qui-quadrado é usada para encontrar intervalo de confiança para σ ou σ^2 .

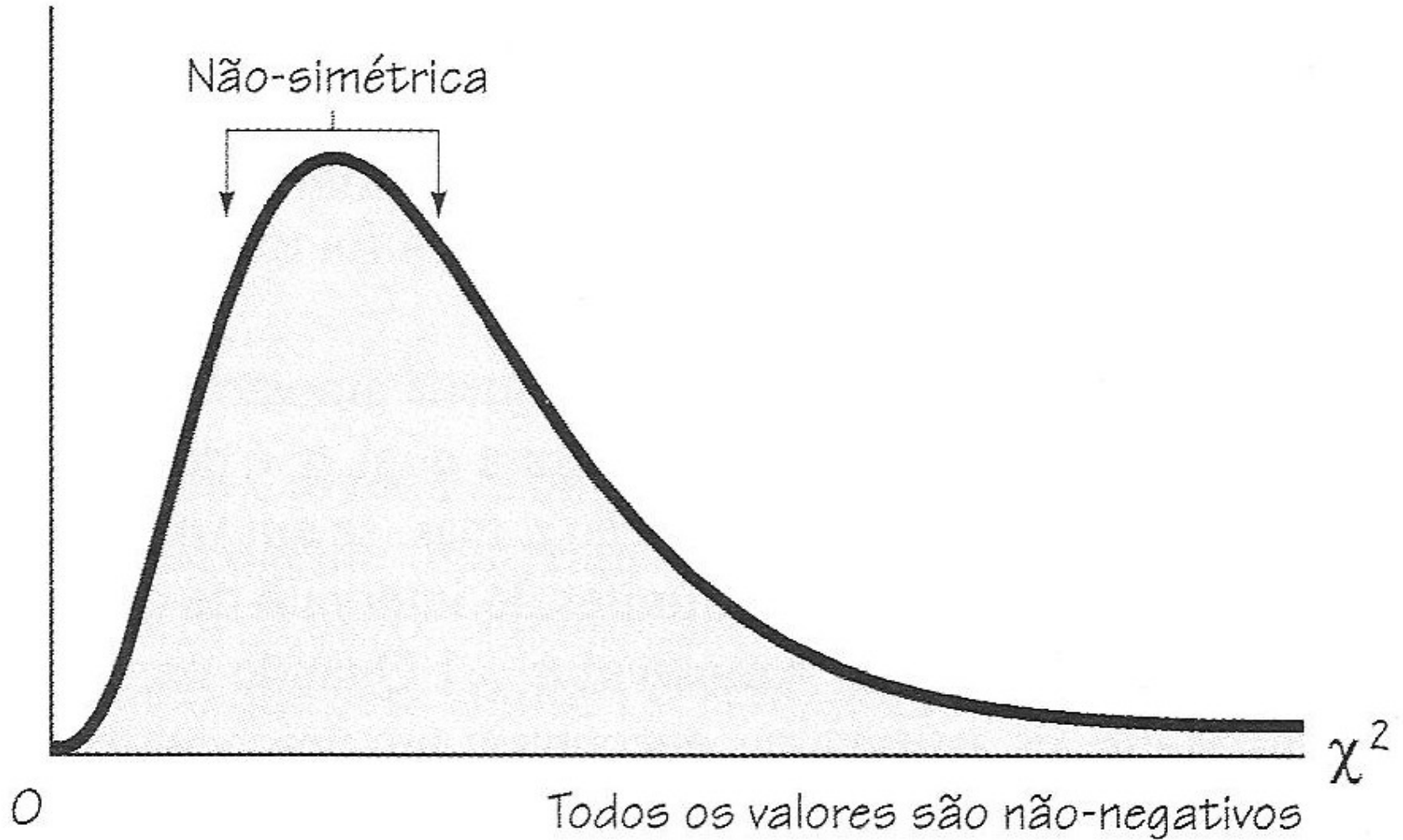
DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO

- Suponha que população:
 - Seja normalmente distribuída.
 - Tenha variância populacional (σ^2).
- Desta população:
 - São selecionadas amostras aleatórias independentes de tamanho n .
 - São calculadas a variância amostral (s^2).
- Esta estatística amostral tem **distribuição qui-quadrado**:

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma^2}$$

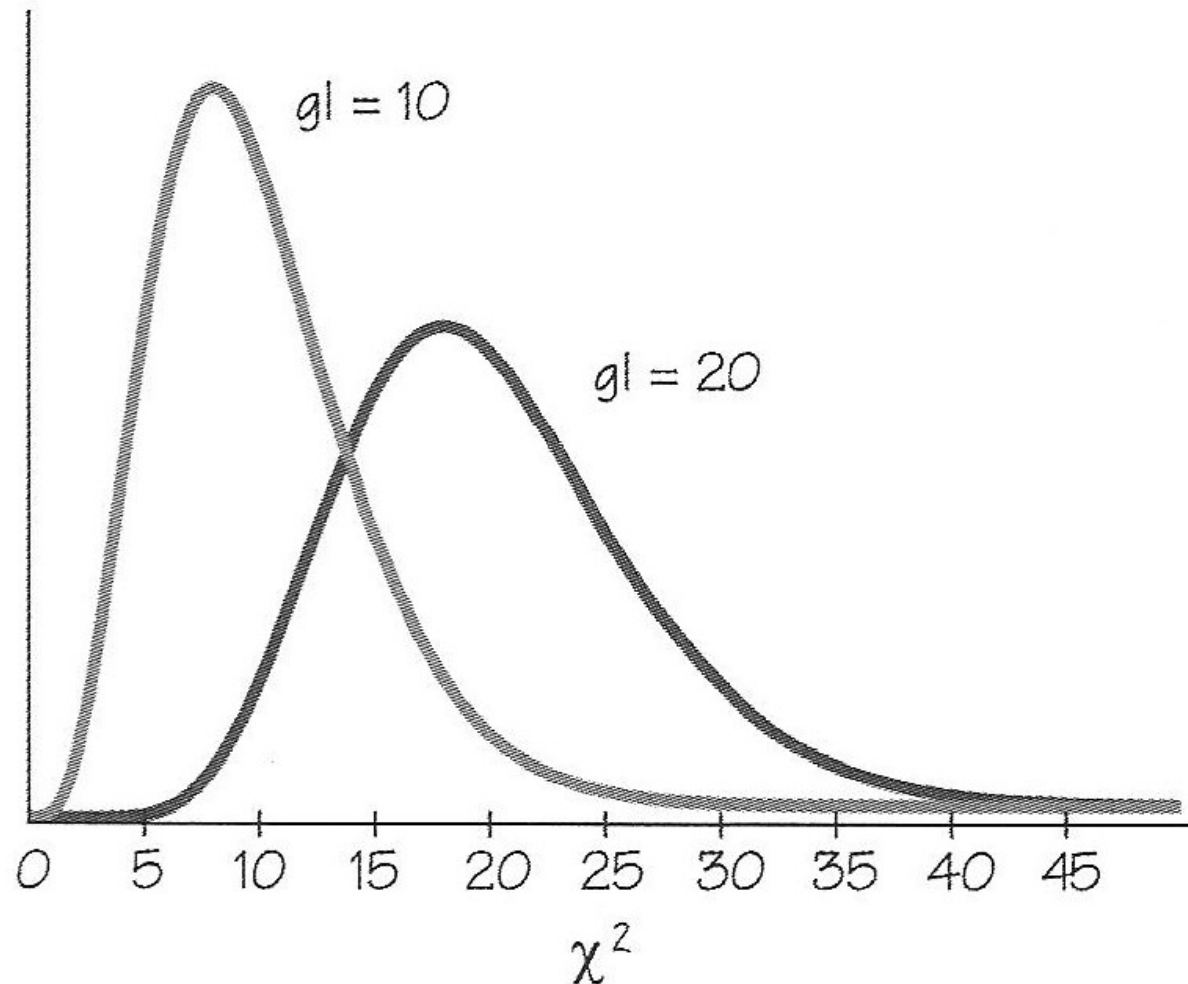
- A distribuição (χ^2) é determinada pelos graus de liberdade, por enquanto, calculada como $n - 1$.

PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO



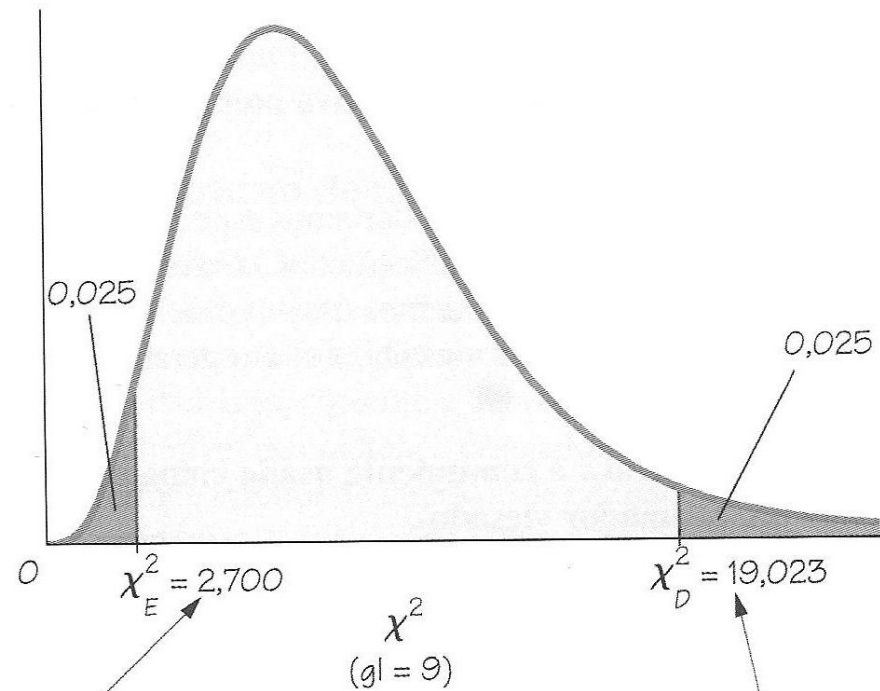
MAIS PROPRIEDADES

- À medida que graus de liberdade aumentam, distribuição qui-quadrado se aproxima de distribuição normal



VALORES CRÍTICOS DA DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO

- Na Tabela A-4, cada valor crítico de χ^2 corresponde à área acumulada à direita do valor crítico (ex.: $n=10$; área=0,025).
- Para amostra de tamanho $n=10$, extraída de população normalmente distribuída, a estatística χ^2 tem probabilidade 0,95 de estar entre valores críticos de 2,700 e 19,023.



Para obter esse valor crítico, localize o 9 na coluna da esquerda para os graus de liberdade e a seguir localize 0,975 ao longo da linha do topo. A área total à direita desse valor crítico é 0,975, que se obtém pela subtração de 0,025 de 1.

Para obter esse valor crítico, localize o 9 na coluna da esquerda para os graus de liberdade e a seguir localize 0,025 ao longo da linha do topo.

ESTIMADORES DE σ^2 E σ

– A **variância amostral s^2** é a melhor estimativa pontual da variância populacional.

– Intervalo de confiança para variância populacional:

$$\frac{(n - 1)s^2}{\chi_D^2} < \sigma^2 < \frac{(n - 1)s^2}{\chi_E^2}$$

– O **desvio padrão amostral s** é comumente usado como estimativa pontual de σ , mesmo sendo estimador viesado.

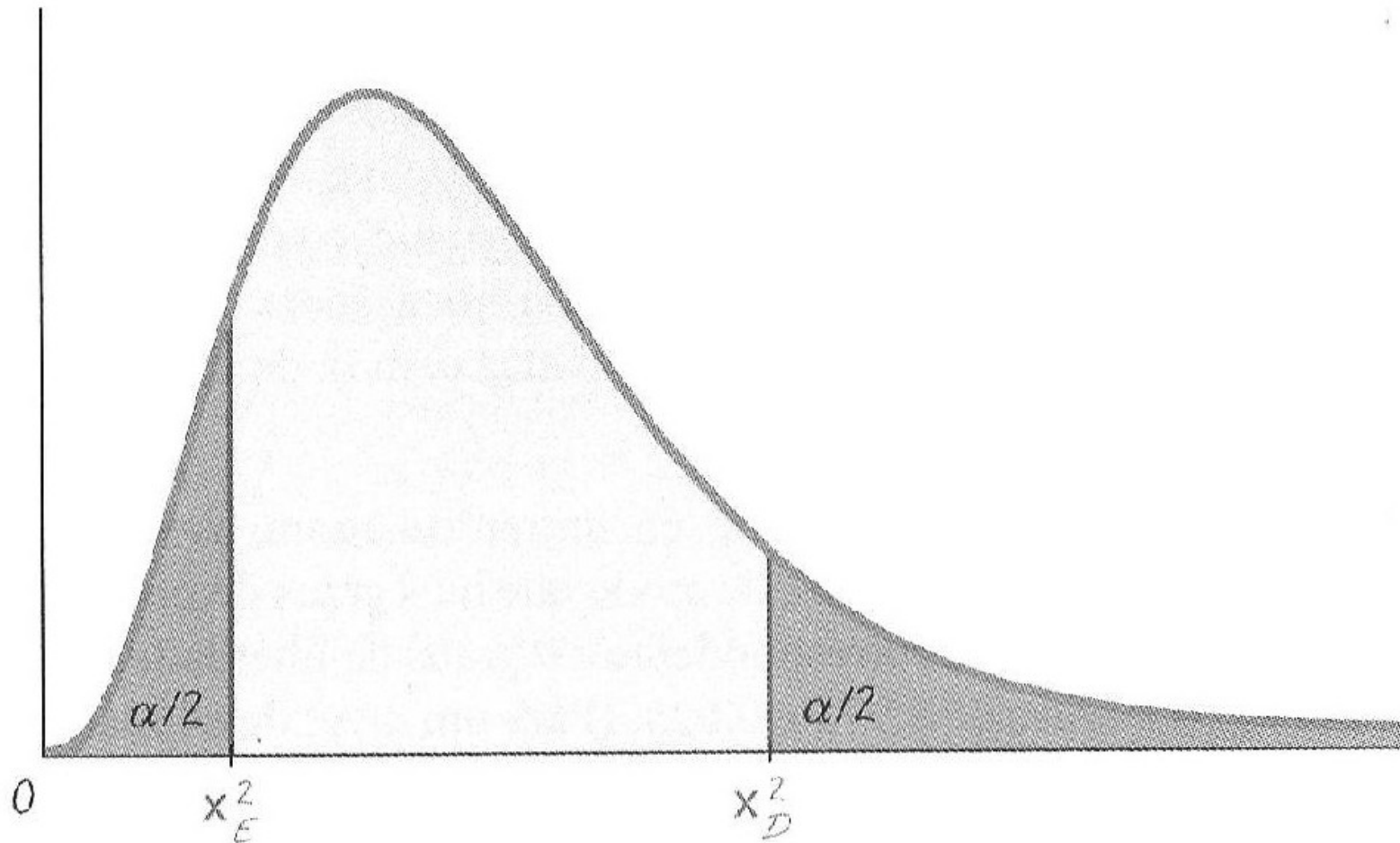
– Intervalo de confiança para desvio padrão populacional:

$$\sqrt{\frac{(n - 1)s^2}{\chi_D^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n - 1)s^2}{\chi_E^2}}$$

– Sendo: χ_E^2 (valor crítico da cauda esquerda) e χ_D^2 (valor crítico da cauda direita).

DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO

- Valores críticos χ^2_E e χ^2_D separam áreas extremas que correspondem às variâncias amostrais que são improváveis, com probabilidade α .



CONSTRUÇÃO DE INTERVALO DE CONFIANÇA

- Verifique se requisitos são satisfeitos: (1) amostra aleatória simples; e (2) histograma ou gráfico dos quantis normais sugere população muito próxima da distribuição normal.
- Usando $n - 1$, ache valores críticos χ^2_E e χ^2_D , que correspondem ao nível de confiança desejado.
- Calcule os limites superior e inferior do intervalo de confiança:

$$\frac{(n - 1)s^2}{\chi_D^2} < \sigma^2 < \frac{(n - 1)s^2}{\chi_E^2}$$

- Faça o mesmo para o desvio padrão (raiz quadrada).
- Arredonde limites do intervalo de confiança resultantes.
- Superposição de intervalos de confiança não deve ser usada para tirar conclusões sobre igualdade de variâncias.

TAMANHO AMOSTRAL

Tamanho amostral para σ^2		Tamanho amostral para σ	
Para se ter 95% de confiança de que s^2 está a menos de	do valor de σ^2 , o tamanho amostral n deve ser, no mínimo	Para se ter 95% de confiança de que s está a menos de	do valor de σ , o tamanho amostral n deve ser, no mínimo
1%	77.207	1%	19.204
5%	3.148	5%	767
10%	805	10%	191
20%	210	20%	47
30%	97	30%	20
40%	56	40%	11
50%	37	50%	7
Para se ter 99% de confiança de que s^2 está a menos de	do valor de σ^2 , o tamanho amostral n deve ser, no mínimo	Para se ter 99% de confiança de que s está a menos de	do valor de σ , o tamanho amostral n deve ser, no mínimo
1%	133.448	1%	33.218
5%	5.457	5%	1.335
10%	1.401	10%	335
20%	368	20%	84
30%	171	30%	37
40%	100	40%	21
50%	67	50%	13

APLICAÇÃO NO STATA

INSTALANDO MÓDULO STATAQUEST NO STATA

- Veja dois arquivos pdf no site para utilizar o módulo StataQuest, o qual instala o comando “ztesti”:

```
net cd http://www.stata.com
```

```
net cd quest7
```

```
net install quest1
```

```
net install quest2
```

```
net install quest3
```

PROPORÇÕES (*cii* ; *ci*)

– **Proporção para parâmetro binomial:**

cii #obs #succ, level(#)

cii 100 40, level(95)

cii 100 40, level(95) wilson

– Sendo: tamanho amostral (*obs*); número de sucessos (*succ*); e nível de confiança (*level*).

– **Para analisar variável (*x001*) de banco de dados:**

– Antes, variável binomial precisa ser codificada em 0/1:

gen homem=x001

replace homem=0 if x001==2

ci homem, binomial level(95)

ci homem, binomial wilson level(95)

– Erro padrão acima (Std.Err.) é igual a (Std.Dev.)/ \sqrt{n} abaixo:

sum homem

MÉDIAS COM σ CONHECIDO (*ztesti*)

- Média para população normal, σ conhecido:

ztesti #obs #mean # σ #h0, level(#)

ztesti 16 24.3 6 0, level(95)

- Sendo: tamanho amostral (*obs*); média amostral (*mean*); desvio padrão populacional (σ); média sob hipótese nula (*h0*), mas intervalo de confiança não será afetado por H_0 ; e nível de confiança (*level*).
- Certos comandos terminados em “i” não utilizam informações do banco, mas sim dados digitados manualmente. É uma espécie de calculadora.
- O comando “ztesti” é instalado pelo módulo StataQuest.

MÉDIAS COM σ DESCONHECIDO (*cii* ; *ci*)

- Média para população normal, σ desconhecido:

cii #obs #mean #sd, level(#)

cii 9 4 3, level(95)

- Sendo: tamanho amostral (*obs*); média amostral (*mean*); desvio padrão amostral (*sd*); e nível de confiança (*level*).

- Para analisar variável (*tradrat5*) do banco de dados:

ci varname, level(#)

ci tradrat5, level(95)

ou

mean tradrat5

- Sendo: nome da variável (*varname*); e nível de confiança (*level*).

DESVIOS PADRÕES (*sctesti* ; *sctest*)

- Desvio padrão para população normal:

sctesti #obs #mean #sd #val, level(#)

sctesti 40 18 5 3, level(95)

- Sendo: tamanho amostral (*obs*); média amostral (*mean*); desvio padrão amostral (*sd*); desvio padrão populacional (*val*); e nível de confiança (*level*).

- Para analisar variável (*tradrat5*) do banco de dados:

sctest varname==#, level(#)

sctest tradrat5==1, level(95)

- Testa se desvio padrão da variável é igual a #, sendo: nome da variável (*varname*); e nível de confiança (*level*).