# AULA 18
# Experimentos Multinomiais e Tabelas de Contingência

**Ernesto F. L. Amaral**

**06 de outubro de 2011**
**Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)**

**Fonte:**

**Triola, Mario F. 2008. "Introdução à estatística". 10 ª ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 11 (pp.468-505).**

# ESQUEMA DA AULA

– Experimentos multinomiais: aderência.

– Tabelas de contingência: independência e homogeneidade.

– Teste de McNemar para dados emparelhados.

# VISÃO GERAL

– Tratar de dados categóricos (ou qualitativos ou de atributo) que podem ser separados em diferentes células.

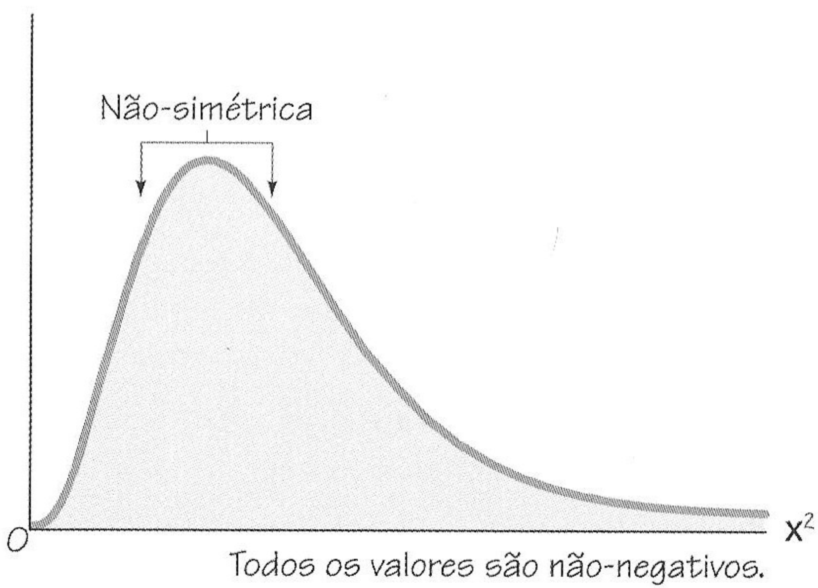
– **Objetivo** é testar afirmativas sobre dados categóricos que consistem em contagem de freqüências para as categorias:

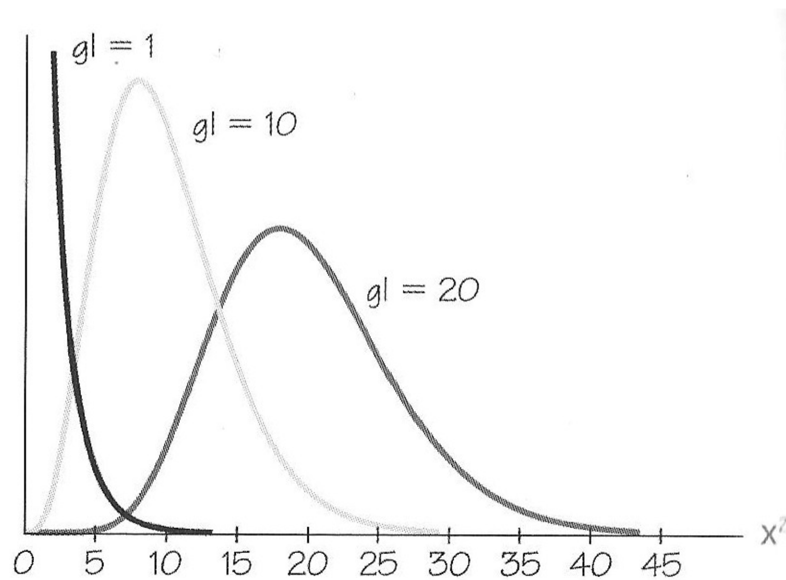
- – **Experimentos multinomiais:** contagens de freqüências observadas, arranjadas em uma única linha ou coluna (tabela de freqüência de entrada única) para verificar se tais contagens seguem alguma distribuição alegada.
- – **Tabelas de contingência:** contagens de freqüência arranjadas em uma tabela com, no mínimo, 2 linhas e 2 colunas.
- – **Tabelas de dupla entrada** que envolvem dados emparelhados.

# DISTRIBUIÇÃO DE QUI-QUADRADO

– É utilizada a distribuição de qui-quadrado que possui as seguintes propriedades:

- – Não é simétrica.
- – Valores da distribuição podem ser 0 ou positivos, mas não podem ser negativos.
- – É diferente para cada número de graus de liberdade.



# EXPERIMENTOS MULTINOMIAIS: ADERÊNCIA

# TESTE DE HIPÓTESE

– O teste de hipótese usará a distribuição qui-quadrado com as contagens de freqüências observadas e as contagens de freqüências esperadas.

– Ou seja, a estatística de teste qui-quadrado é uma medida de discrepância entre as freqüências observadas e esperadas.

– O experimento multinomial possui mais de duas categorias, enquanto o experimento binomial tem exatamente duas categorias.

# EXPERIMENTO MULTINOMIAL

– Este experimento satisfaz as seguintes condições:

  – Número de tentativas é fixo.

  – Tentativas são independentes.

  – Todos resultados de cada tentativa devem ser classificados em exatamente uma das várias diferentes categorias.

  – Probabilidades para diferentes categorias permanecem constantes para cada tentativa.

– É testada afirmativa de que freqüências observadas nas diferentes categorias se ajustam a uma distribuição alegada.

# TESTE DE ADERÊNCIA

– O teste de aderência (bondade de ajuste) é usado para testar a hipótese de que uma distribuição de freqüência observada se ajusta (ou concorda com) alguma distribuição teórica especificada.

– Notação:

– ***O***: freqüência observada de um resultado.

– ***E***: freqüência esperada de um resultado.

– ***k***: número de diferentes categorias ou resultados.

– ***n***: número de tentativas total.

# ENCONTRANDO FREQÜÊNCIAS ESPERADAS

– Se todas freqüências esperadas **são iguais**:

– Então cada freqüência esperada é a soma de todas freqüências observadas dividida pelo número de categorias.

– $E=n/k$.

– Se as freqüências esperadas **não são todas iguais**:

– Então cada freqüência esperada é encontrada multiplicando-se a soma de todas freqüências observadas pela probabilidade da categoria.

– $E=np$ para cada categoria.

# ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

– **Freqüências observadas** têm que ser números inteiros (contagens reais), mas **freqüências esperadas** não precisam ser números inteiros.

– **Freqüências amostrais** comumente se desviam um pouco dos valores teoricamente esperados.

– Devemos testar se as diferenças entre os valores reais observados (***O***) e os valores teoricamente esperados (***E***) são estatisticamente significativos.

# REQUISITOS PARA TESTE DE DIFERENÇAS

– Dados selecionados aleatoriamente.

– Dados amostrais consistem em contagens de freqüências para cada uma das diferentes categorias.

– Para cada categoria, freqüência esperada é, no mínimo, 5.

– Valores críticos são encontrados usando-se graus de liberdade ($k$–1) específicos, sendo $k$ o número de categorias.

– Estes testes são sempre unilaterais à direita.

– Estatística de teste para testes de aderência em experimentos multinomiais:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

# RESULTADOS DA ESTATÍSTICA DE TESTE

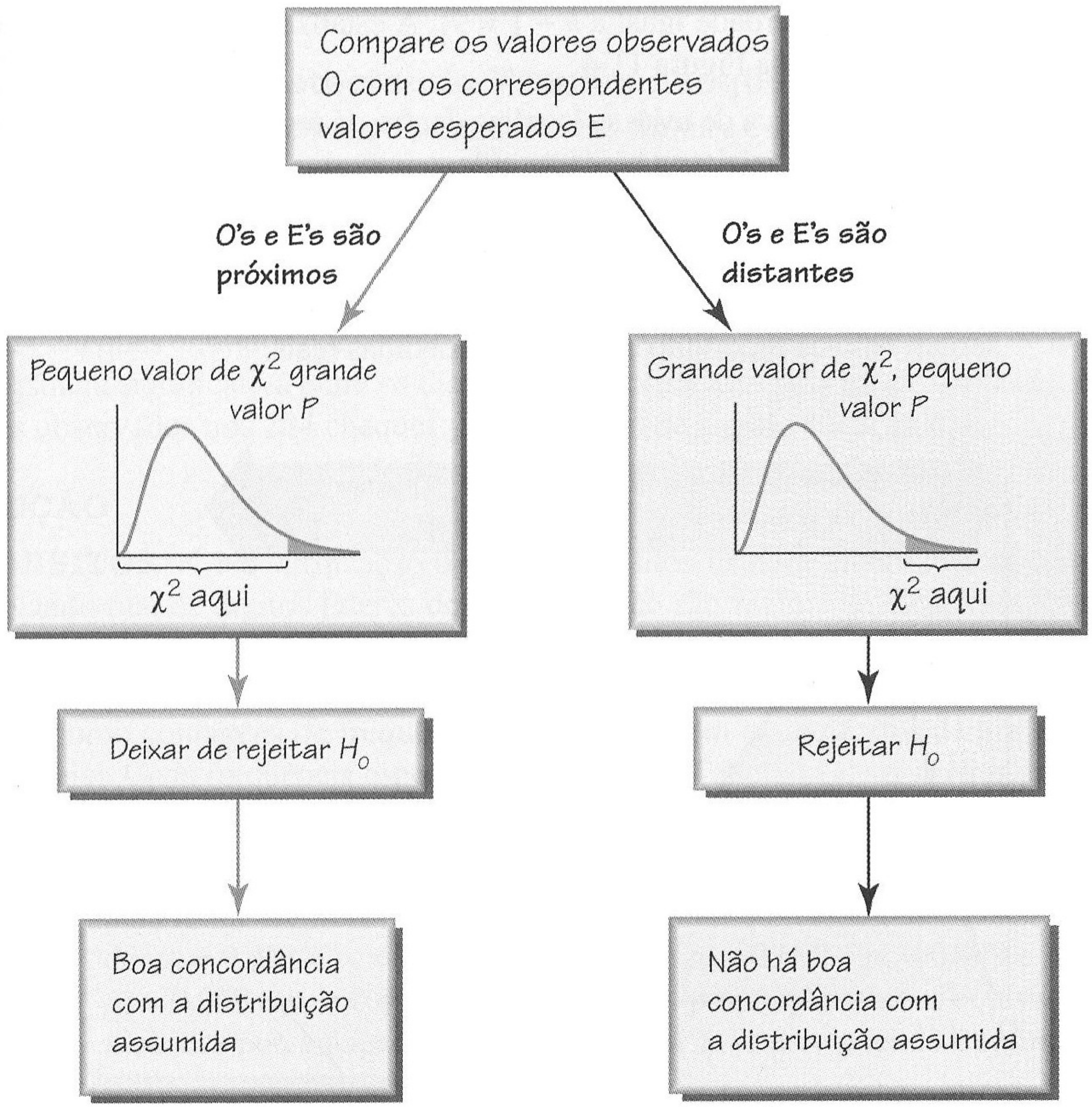
– A estatística de teste $\chi^2$ se baseia nas diferenças entre valores observados e esperados.

– Uma concordância entre valores observados e esperados levará a um pequeno valor de $\chi^2$ e a um grande valor *P*.

– Uma discrepância entre valores observados e esperados levará a um grande valor de $\chi^2$ e a um pequeno valor *P*.

– O valor crítico e a região crítica se localizam no extremo direito da distribuição (unilateral à direita).

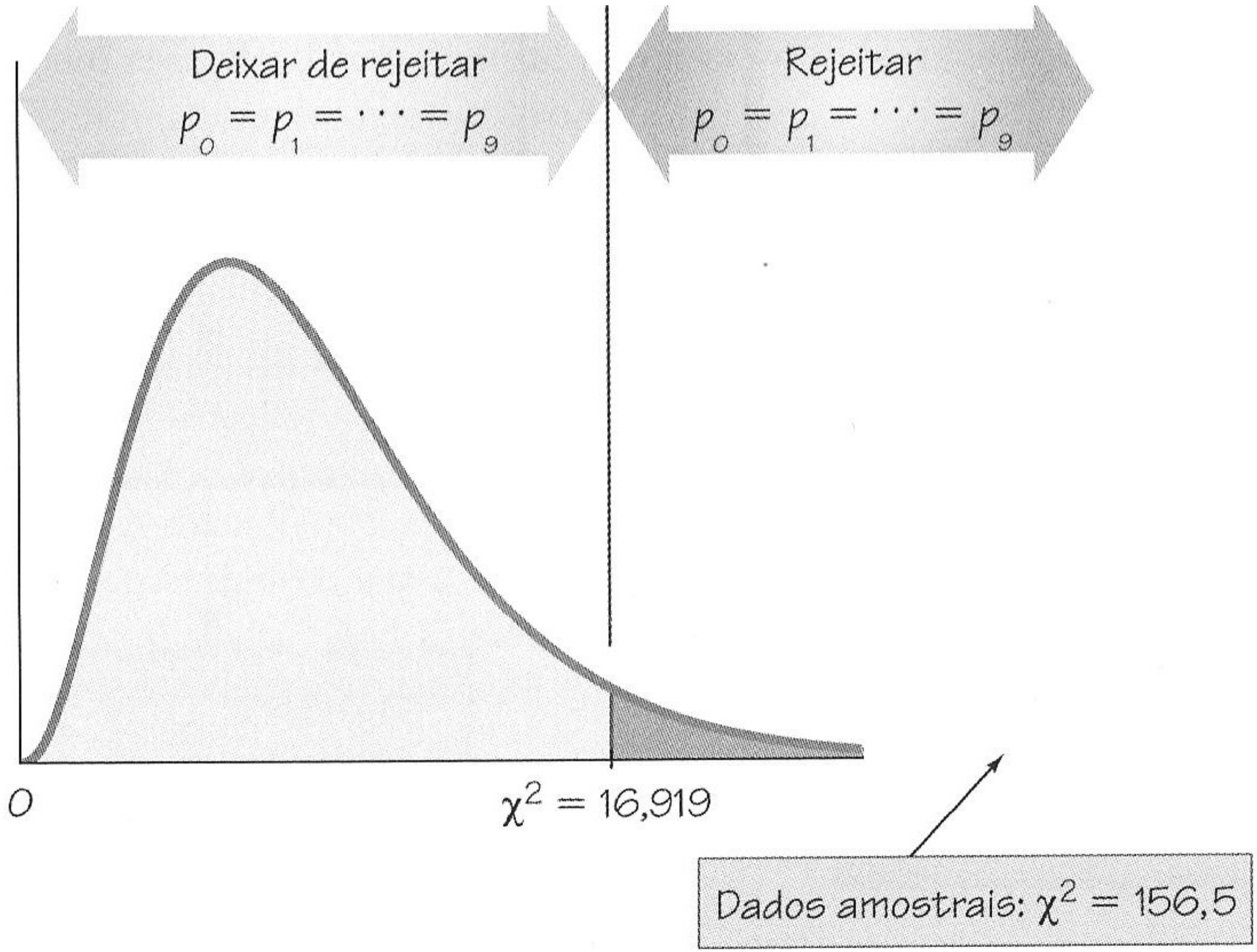
# RELAÇÕES ENTRE $\chi^2$, VALOR *P* E ADERÊNCIA



# EX.: TESTE DE $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = p_9$

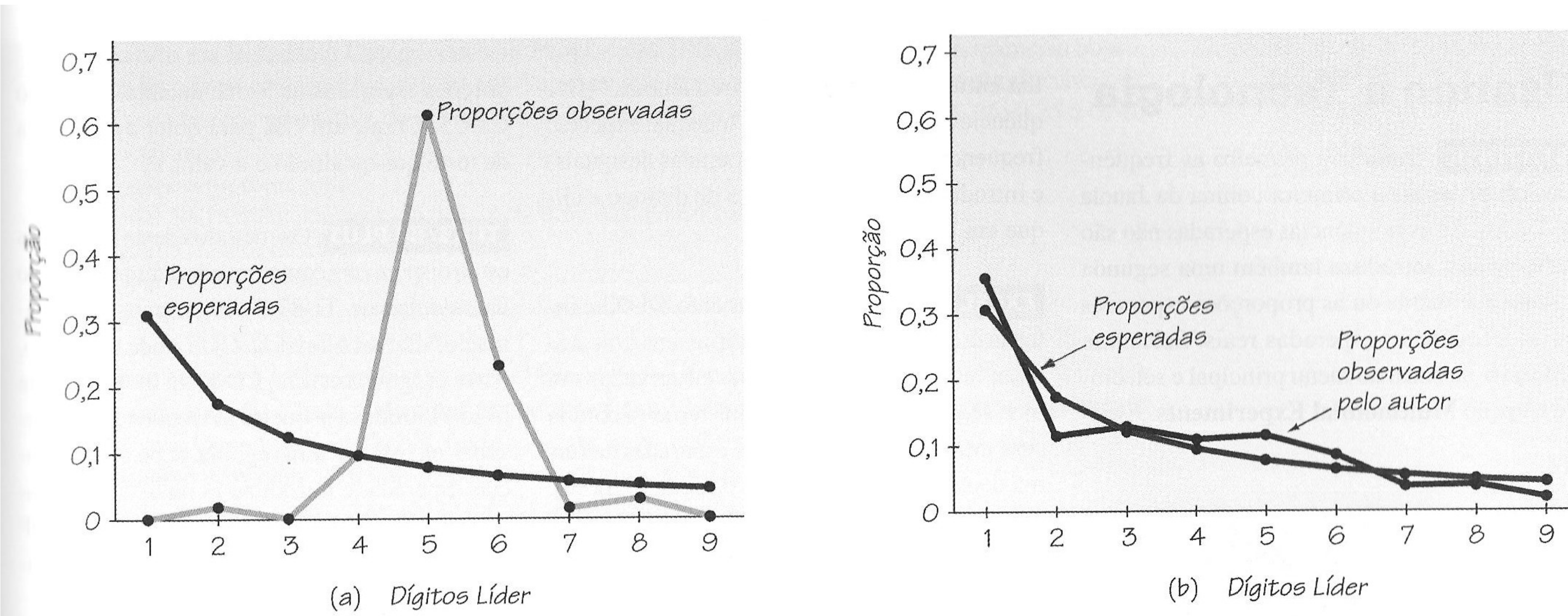
– Ho: frequências relativas (probs.) de 10 células são iguais.

– Graus de liberdade: $k - 1 = 10 - 1 = 9$



# EX.: COMPARAÇÃO DE FREQÜÊNCIAS

– Gráficos como este abaixo são úteis na comparação visual de freqüências esperadas e observadas, bem como na sugestão de quais categorias resultam principais diferenças.



# VALORES *P*

– A abordagem do valor *P* também pode ser usada.

– Os valores *P* são fornecidos automaticamente por programas estatísticos.

# FUNDAMENTOS PARA ESTATÍSTICA DE TESTE

– Mede-se diferença de freqüências observadas e esperadas.

– **Simples soma** das diferenças entre valores observados e esperados não é eficaz, porque soma é sempre zero.

– **Elevação ao quadrado** dos valores de ($O$–$E$) fornece uma estatística melhor (como no caso do desvio padrão).

– $\sum(O-E)^2$ mede a magnitude das diferenças.

– $\sum(O-E)^2/E$ mede magnitude das diferenças em relação ao esperado. Distribuição pode ser aproximada pela distribuição $\chi^2$ que é contínua.

– **Graus de liberdade** indicam número de categorias que podemos inferir freqüências, antes que estas sejam determinadas para todas categorias.

# TABELAS DE CONTINGÊNCIA:
# INDEPENDÊNCIA E HOMOGENEIDADE

# TABELAS DE CONTINGÊNCIA

– **Tabela de contingência** (ou tabela de freqüência de dupla entrada) é uma tabela na qual as freqüências correspondem a duas variáveis (linhas e colunas).

– Estas tabelas incluem contagens de freqüência para dados categóricos arranjados em uma tabela com pelo menos 2 linhas e 2 colunas.

– **Testes de independência** são usados para determinar se uma variável linha de uma tabela de contingência é independente de sua variável coluna.

– **Testes de homogeneidade** são usados para determinar se populações diferentes têm as mesmas proporções de alguma característica.

# TESTE DE INDEPENDÊNCIA

– Um **teste de independência** testa a hipótese nula de que não há associação entre a variável linha e a variável coluna em uma tabela de contingência.

– **Hipótese nula:** variáveis linha e coluna são independentes.

# REQUISITOS

– Dados amostrais são selecionados aleatoriamente e são representados como contagens de freqüências em tabela de dupla entrada.

– **Hipótese nula** ($H_0$) é a afirmativa de que variáveis linha e coluna são **independentes**.

– **Hipótese alternativa** ($H_1$) é a afirmativa de que as variáveis linha e coluna são **dependentes**.

– Em toda célula da tabela, a freqüência esperada ($E$) é no mínimo 5.

– Não há exigência quanto à freqüência observada ($O$).

– Não há exigência de que população deva ter distribuição normal ou qualquer outra.

# ESTATÍSTICA DE TESTE

– Estatística de teste para um teste de independência:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

– Permite medir grau de discordância entre freqüências observadas e as teoricamente esperadas, quando as duas variáveis são independentes.

– Grandes valores da estatística de teste refletem diferenças significativas entre as freqüências observadas e esperadas.

# VALORES CRÍTICOS

– **Valores críticos** são encontrados com graus de liberdade $[(r-1)(c-1)]$, em que $r$ é o número de linhas e $c$ é o número de colunas.

– Ao saber total de todas freqüências, podemos **associar livremente** freqüências a apenas $r-1$ linhas e a $c-1$ colunas, antes que as freqüências de todas células sejam determinadas.

– Porém, não podemos ter freqüências negativas ou freqüências tão grandes que a soma de qualquer linha (ou coluna) exceda total das freqüências observadas.

– Em um teste de independência com uma tabela de contingência, a região crítica se localiza apenas na **cauda direita**.

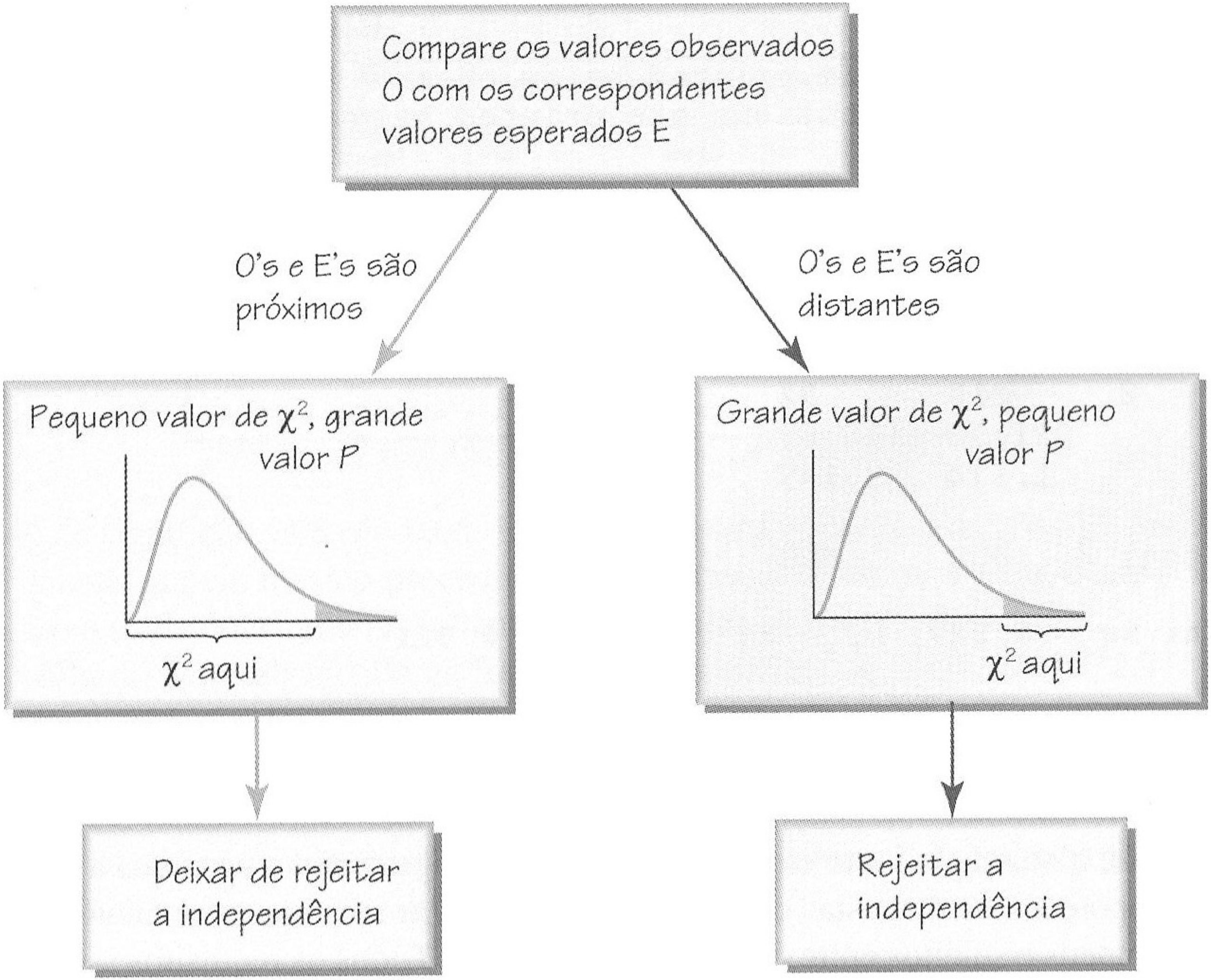
# FREQÜÊNCIA ESPERADA PARA UMA CÉLULA

– Freqüência esperada (*E*) pode ser calculada para cada célula:
  - Multiplicando-se o total das freqüências das linhas pelo total das freqüências das colunas.
  - Dividindo-se o resultado pelo grande total das freqüências.

$$freq\ddot{u}\hat{e}ncia\ esperada = (total\ geral) * \frac{(total\ da\ linha)}{(total\ geral)} * \frac{(total\ da\ coluna)}{(total\ geral)}$$

$$E = freq\ddot{u}\hat{e}ncia\ esperada = \frac{(total\ da\ linha) * (total\ da\ coluna)}{(total\ geral)}$$

# COMPONENTES-CHAVE NO TESTE DE INDEPENDÊNCIA



# TESTE DE HOMOGENEIDADE

– Amostras podem ser extraídas de **populações diferentes** e desejamos determinar se essas populações têm as mesmas proporções da característica em consideração.

– Em um **teste de homogeneidade**, testamos a afirmativa de que populações diferentes têm a mesma proporção de alguma característica.

– Ao realizar um teste de homogeneidade, podemos usar **mesmos** requisitos, estatística de teste, valor crítico e demais procedimentos já apresentados.

– **Exceção** é que em vez de testar a hipótese nula de independência entre as variáveis linha e coluna, testamos a hipótese nula de que as diferentes populações têm as mesmas proporções de alguma característica.

# TESTE EXATO DE FISHER

– Para tabelas 2 x 2, anteriormente incluímos requisito de que toda célula deve ter freqüência esperada de, no mínimo, 5.

– Esse requisito é necessário para que a distribuição $\chi^2$ seja uma aproximação adequada para a distribuição exata da estatística de teste.

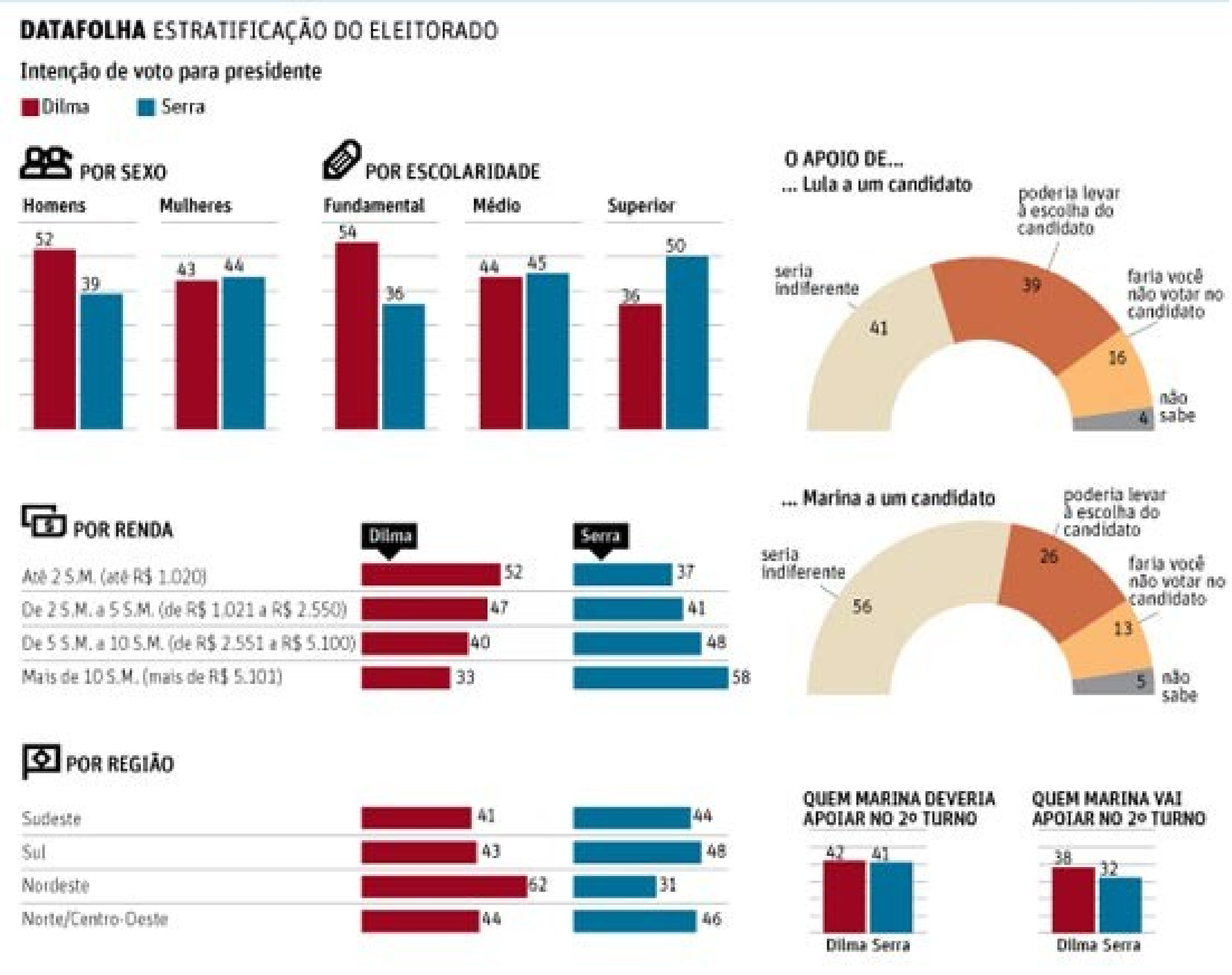
– O **teste exato de Fisher** é usado para tabelas 2 x 2, porque fornece valor *P* exato e não exige técnica de aproximação.

– Ou seja, teste de Fisher é útil para casos em que freqüência esperada em alguma célula é menor do que 5.

– Geralmente é estimado com programas computacionais.

# INTENÇÃO DE VOTO PARA PRESIDENTE

– Datafolha (10/10/2010), margem de erro (±2%):




Fonte: http://www1.folha.uol.com.br/poder/812469-nordeste-assegura-dianteira-de-dilma-no-2-turno.shtml

# INTENÇÃO DE VOTO PARA PRESIDENTE (%)

– Valores observados:

| Sexo | Dilma | Serra | Total |
|---|---|---|---|
| Homem | 52 | 39 | 91 |
| Mulher | 43 | 44 | 87 |
| **Total** | **95** | **83** | **178** |

– Valores esperados:

| Sexo | Dilma | Serra | Total |
|---|---|---|---|
| Homem | (95*91)/178= 48,57 | (83*91)/178= 42,43 | 91 |
| Mulher | (95*87)/178= 46,43 | (83*87)/178= 40,57 | 87 |
| **Total** | **95** | **83** | **178** |

– $\chi^2 = (52\text{-}48{,}57)^2/48{,}57 + \ldots + (44\text{-}40{,}57)^2/40{,}57 \approx 1{,}063$

– $gl = (r\text{-}1)(c\text{-}1) = (2\text{-}1)(2\text{-}1) = 1$

– Tabela A-4 (pág.621): valor crítico = 3,841; $\alpha = 0{,}05$.

# NO STATA

– **Entrando com dados:**

clear

input mulher dilma votos

0 1 52

1 1 43

0 0 39

1 0 44

end

– **Teste de qui-quadrado:**

tab mulher dilma [fweight=votos], chi2

| mulher | dilma 0 | 1 | Total |
|---|---|---|---|
| 0 | 39 | 52 | 91 |
| 1 | 44 | 43 | 87 |
| Total | 83 | 95 | 178 |

Pearson chi2(1) = 1.0645 Pr = 0.302

# TESTE DE MCNEMAR PARA DADOS EMPARELHADOS

# TESTE DE MCNEMAR

– Procedimentos para a tabela de contingência, apresentados anteriormente, se baseiam em **dados independentes**.

– Para tabelas 2 x 2 que consistem em contagens de freqüência que resultam de **dados emparelhados**, não temos independência.

– **Teste de McNemar** usa contagens de freqüências de dados emparelhados nominais com duas categorias.

– É testada **hipótese nula** de que as freqüências das diferentes categorias ocorrem na mesma proporção.

– Freqüências *b* e *c* ocorrem na mesma proporção?

| | | **Tratamento X** | |
|---|---|---|---|
| | | Curado | Não curado |
| **Tratamento Y** | Curado | a | b |
| | Não curado | c | d |

# REQUISITOS

– Dados amostrais foram selecionados **aleatoriamente**.

– Temos **dados emparelhados** de contagens de freqüências.

– Dados são do **nível nominal** de mensuração.

– Cada observação pode ser classificada de duas maneiras (**duas variáveis dicotômicas**).

– Freqüências são tais que $\boldsymbol{b + c \geq 10}$.

– **Estatística de teste** para hipótese nula de que freqüências $b$ e $c$ ocorrem na mesma proporção:

$$\chi^2 = \frac{(|b - c| - 1)^2}{b + c}$$

– **Região crítica** se localiza apenas na cauda direita.

– **Graus de liberdade** = 1 (Tabela A-4).

# APLICAÇÕES DO TESTE DE MCNEMAR

– Em vez de usarmos resultados “cura/cura” e resultados “não cura/não cura”, usamos apenas os resultados “cura/não cura” e “não cura/cura”.

– Isto é, usamos apenas resultados de categorias diferentes.

– **Pares discordantes** de resultados são provenientes de pares de categorias nas quais as duas categorias são diferentes.

– Além da comparação de tratamentos atribuídos a dados emparelhados, o teste de McNemar é usado para testar a hipótese nula de nenhuma mudança em **experimentos do tipo antes/depois**.