AULA 20
Modelo de Regressão Simples

Ernesto F. L. Amaral

13 de outubro de 2011
Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)

Fonte:
Wooldridge, Jeffrey M. "Introdução à econometria: uma abordagem moderna". São Paulo: Cengage Learning, 2008. Capítulo 2 (pp.20-63).

ESTRUTURA DO LIVRO

– **Parte 1**: trata de análise de regressão com dados de corte transversal (capítulos 2 ao 9).

– **Parte 2**: análise de regressão com dados de séries temporais (capítulos 10 ao 12).

– **Parte 3**: tópicos avançados (capítulos 13 ao 19).

DOCUMENTAÇÃO DO LIVRO

– UCLA Academic Technology Services:

http://www.ats.ucla.edu

– Introductory Econometrics: A Modern Approach
by Jeffrey M. Wooldridge:

http://fmwww.bc.edu/gstat/examples/wooldridge/wooldridge.html

MODELO DE REGRESSÃO SIMPLES

– O modelo de regressão linear simples explica uma variável (y) com base em modificações em outra variável (x).

– Ou seja, é usado para avaliar a relação entre duas variáveis.

– Esse tipo de regressão não é muito utilizada em ciências sociais aplicadas, devido à sua simplicidade.

– No entanto, serve como ponto de partida, já que sua álgebra e interpretações são fáceis de entender.

– O entendimento do modelo de regressão simples é importante para estudar a regressão múltipla.

PREMISSA E EXEMPLOS

- Premissa da análise econométrica:
  - y e x são duas variáveis que representam uma população.
  - Estamos interessados em explicar y em termos de x.
  - Ou seja, queremos estudar como y varia com variações em x.

- Exemplos:
  - y é o rendimento do trabalhador, e x são os anos de escolaridade.
  - y é a escala ideológica esquerda/direita, e x é o partido político do deputado.
  - y é o índice de tradicionalismo/secularismo, e x é o nível de escolaridade.

PERGUNTAS IMPORTANTES

– Como nunca há uma relação exata entre duas variáveis, como consideramos outros fatores que afetam y?

– Qual é a relação funcional entre y e x?

– Como podemos estar certos de que estamos capturando uma relação *ceteris paribus* (outros fatores constantes) entre y e x?

MODELO DE REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

– Também chamado de modelo de regressão linear de duas variáveis ou modelo de regressão linear bivariada.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

– Terminologia:

y	**x**	**Uso**
Variável Dependente	Variável Independente	Econometria
Variável Explicada	Variável Explicativa	
Variável de Resposta	Variável de Controle	Ciências Experimentais
Variável Prevista	Variável Previsora	
Regressando	Regressor	
	Covariável	

VOLTANDO ÀS PERGUNTAS IMPORTANTES

– **Como nunca há uma relação exata entre duas variáveis, como consideramos outros fatores que afetam y?**

– Variável u é o termo erro ou perturbação da relação.

– Na análise de regressão simples, todos fatores (além de x) que afetam y são tratados como não-observados.

OUTRA PERGUNTA

– **Qual é a relação funcional entre y e x?**

– Se os outros fatores em u são mantidos fixos, de modo que a variação em u é zero ($\Delta u=0$), então x tem um efeito linear sobre y, tal como: $\Delta y=\beta_1\Delta x$; se $\Delta u=0$.

– A linearidade do modelo de regressão linear simples implica que uma variação de uma unidade em x tem o mesmo efeito sobre y, independentemente do valor inicial de x.

– Isso não é realista. Por exemplo, o próximo ano de escolaridade teria um efeito maior sobre os salários, em relação ao anterior. Esse problema será tratado adiante.

E O PROBLEMA DO *CETERIS PARIBUS?*

– **Estamos capturando uma relação *ceteris paribus* (outros fatores constantes) entre y e x?**

– A variação em y é β_1 multiplicado pela variação em x.

– **β_1: parâmetro de inclinação** da relação entre y e x, mantendo fixos os outros fatores em u.

– **β_0: parâmetro de intercepto** é raramente analisado.

– β_1 mede o efeito de x sobre y, mantendo todos os outros fatores (em u) fixos.

– No entanto, estamos ignorando todos os outros fatores.

– Os estimadores de β_0 e β_1 serão confiáveis em uma amostra aleatória, se o termo não-observável (u) estiver relacionado à variável explicativa (x) de modo que o valor médio de u na população seja zero: E(u)=0.

HIPÓTESE SOBRE A RELAÇÃO ENTRE x E u

– Se u e x não estão correlacionados, então (como variáveis aleatórias) não são linearmente relacionados.

– No entanto, a correlação mede somente a dependência linear entre u e x.

– Na correlação, é possível que u seja não-correlacionado com x e seja correlacionado com funções de x, tal como x^2.

– Melhor seria pensar na distribuição condicional de u, dado qualquer valor de x.

– Para um valor de x, podemos obter o valor esperado (ou médio) de u para um grupo da população.

– A hipótese é que o valor médio de u não depende de x:

$$E(u|x) = E(u) = 0$$

– Ou seja, para qualquer valor de x, a média dos fatores não-observáveis é a mesma e, portanto, é igual ao valor médio de u na população (**hipótese de média condicional zero**).

FUNÇÃO DE REGRESSÃO POPULACIONAL

– Quando $E(u|x)=E(u)=0$ é verdadeiro, é útil dividir y em:

  – Parte sistemática (parte de y explicada por x): $\beta_0 + \beta_1 x$

  – Parte não-sistemática (parte de y não explicada por x): u

– Considerando o valor esperado de $y=\beta_0+\beta_1 x+u$ condicionado a x, e usando $E(u|x)=0$, temos a **função de regressão populacional** (FRP), que é uma função linear de x:

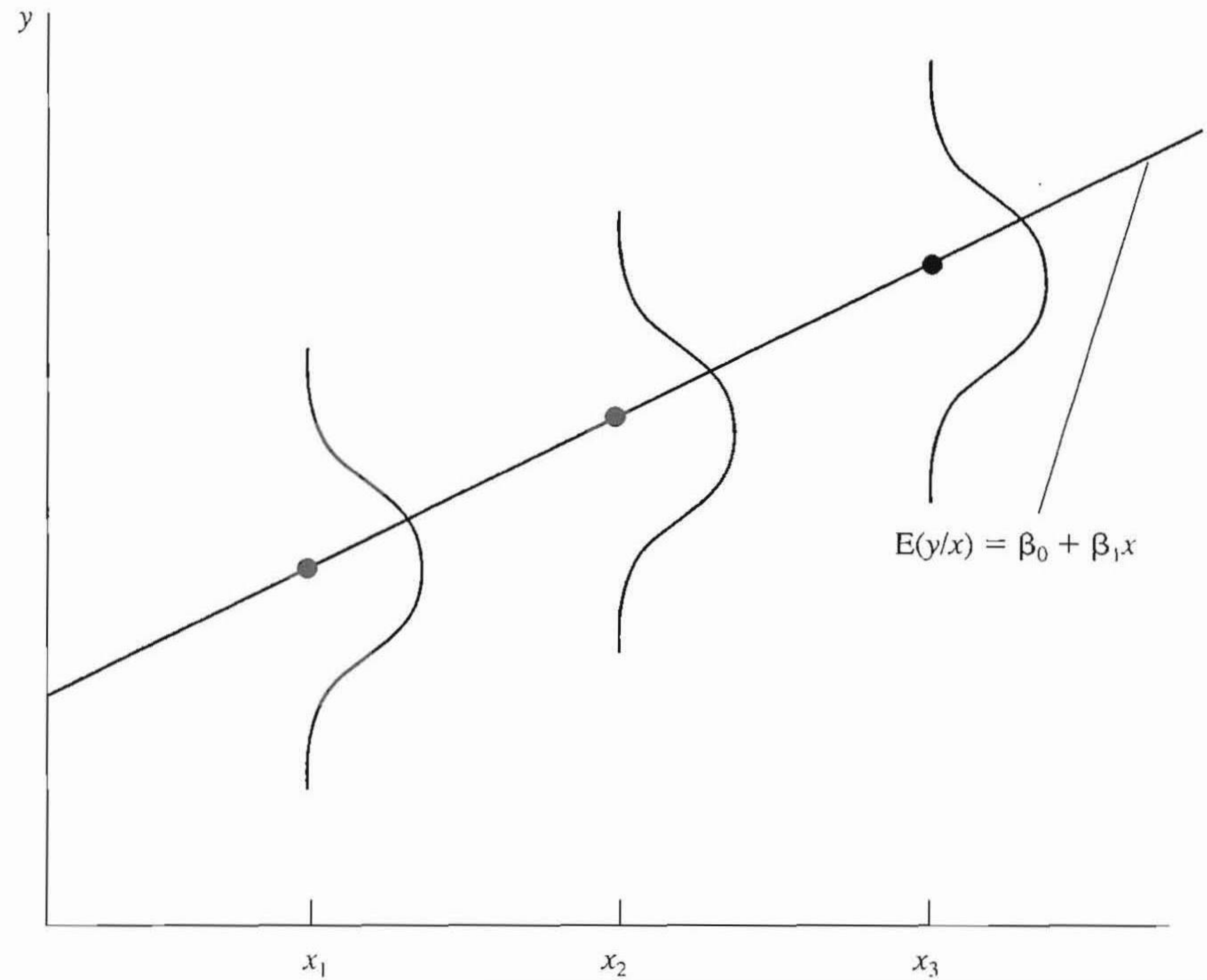
$$E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

– **Linearidade**: o aumento de uma unidade em x faz com que o valor esperado de y varie segundo a magnitude de β_1.

– Para qualquer valor de x, a distribuição de y está centrada ao redor de $E(y|x)$.

Figura 2.1

E($y|x$) como função linear de x.



ESTIMATIVA DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

– Para a estimação dos parâmetros β_0 e β_1, é preciso considerar uma amostra da população:

$$\{(x_i, y_i): i=1, ..., n\}$$

– A equação do modelo de regressão simples é escrito como:

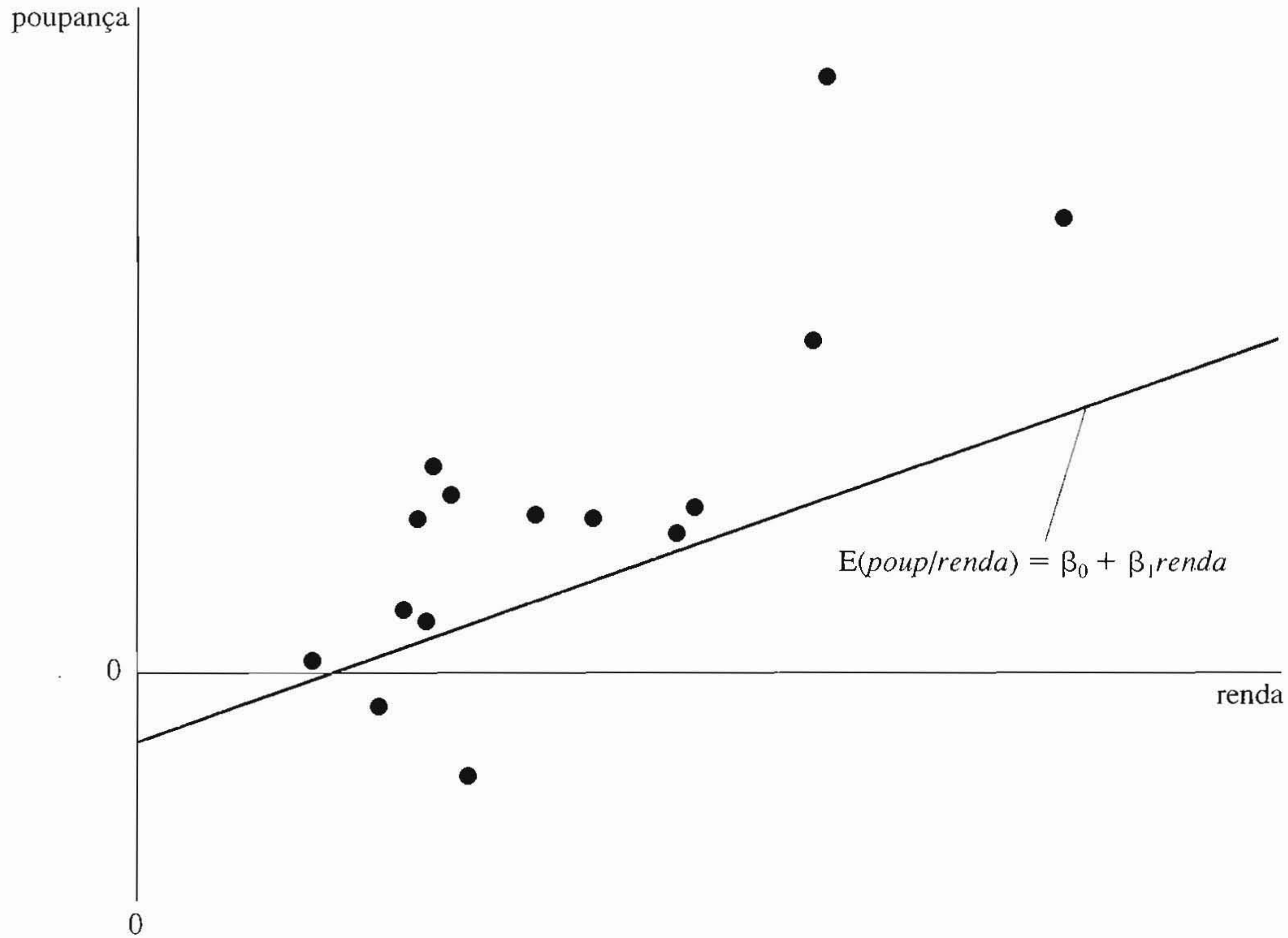
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

– u_i é o termo erro para a observação i, já que contém todos os fatores, além de x_i, que afetam y_i.

– Um exemplo é a poupança anual para a família i (y_i), dependendo da renda anual desta família (x_i), em um determinado ano.

Figura 2.2

Gráfico da dispersão de poupança e renda de 15 famílias e a regressão populacional E(*poup*|*renda*) = $\beta_0 + \beta_1 renda$.



ESTIMATIVA DE MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS

– Como obter estimativas do intercepto (β_0) e da inclinação (β_1) na regressão populacional da poupança sobre a renda?

– Na população, u tem média zero. O valor esperado de u é zero: $E(u)=0$

– Além disso, u é não-correlacionado com x. A covariância entre x e u é zero: $Cov(x,u)=E(xu)=0$

– $E(u)=0$ pode ser escrita como: $E(y-\beta_0-\beta_1x)=0$

– $Cov(x,u)=E(xu)=0$ pode ser escrita como: $E[x(y-\beta_0-\beta_1x)]=0$

– Como há dois parâmetros desconhecidos para estimar (β_0 e β_1), é possível utilizar uma amostra de dados para calcular as estimativas:

$$\hat{\beta}_0 \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_1$$

EQUAÇÕES DA POPULAÇÃO E AMOSTRA

– Média de u na população:

$$E(y - \beta_0 - \beta_1 x) = 0$$

– Média de u na amostra:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)}{n} = 0$$

– Covariância entre x e u na população:

$$E[x(y - \beta_0 - \beta_1 x)] = 0$$

– Covariância entre x e u na amostra:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)}{n} = 0$$

ESTIMATIVAS DE $\hat{\beta}_0$ E $\hat{\beta}_1$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)}{n} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

ESTIMATIVAS DE MQO DE $\hat{\beta}_0$ E $\hat{\beta}_1$

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\textbf{Covariância amostral entre x e y}}{\textbf{Variância amostral de x}}$$

– Se x e y são positivamente correlacionados na amostra, $\hat{\beta}_1$ é positivo e vice-versa.

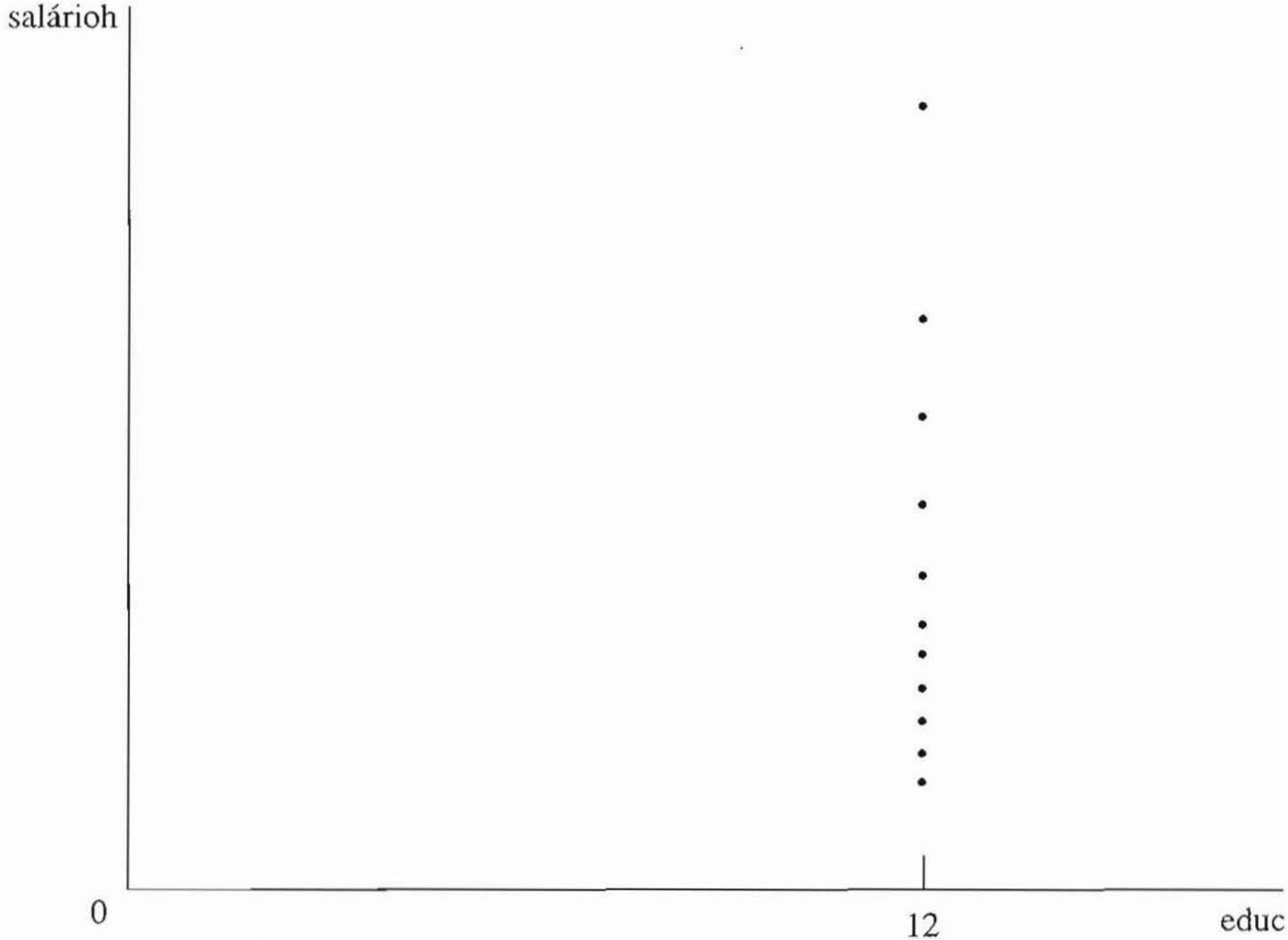
VARIÂNCIA DE x DEVE SER MAIOR QUE ZERO

– A hipótese necessária para calcular estimativas de mínimos quadrados ordinários (MQO) é que a variância amostral de x seja maior que zero.

– Ou seja, os valores de x_i na amostra não devem ser todos iguais a um mesmo valor.

Figura 2.3

Gráfico da dispersão de salários e educação, quando $educ_i = 12$ para todo i.



VALORES ESTIMADOS E RESÍDUOS

– Encontrados o intercepto e a inclinação, teremos um valor estimado para y para cada observação (x) na amostra:

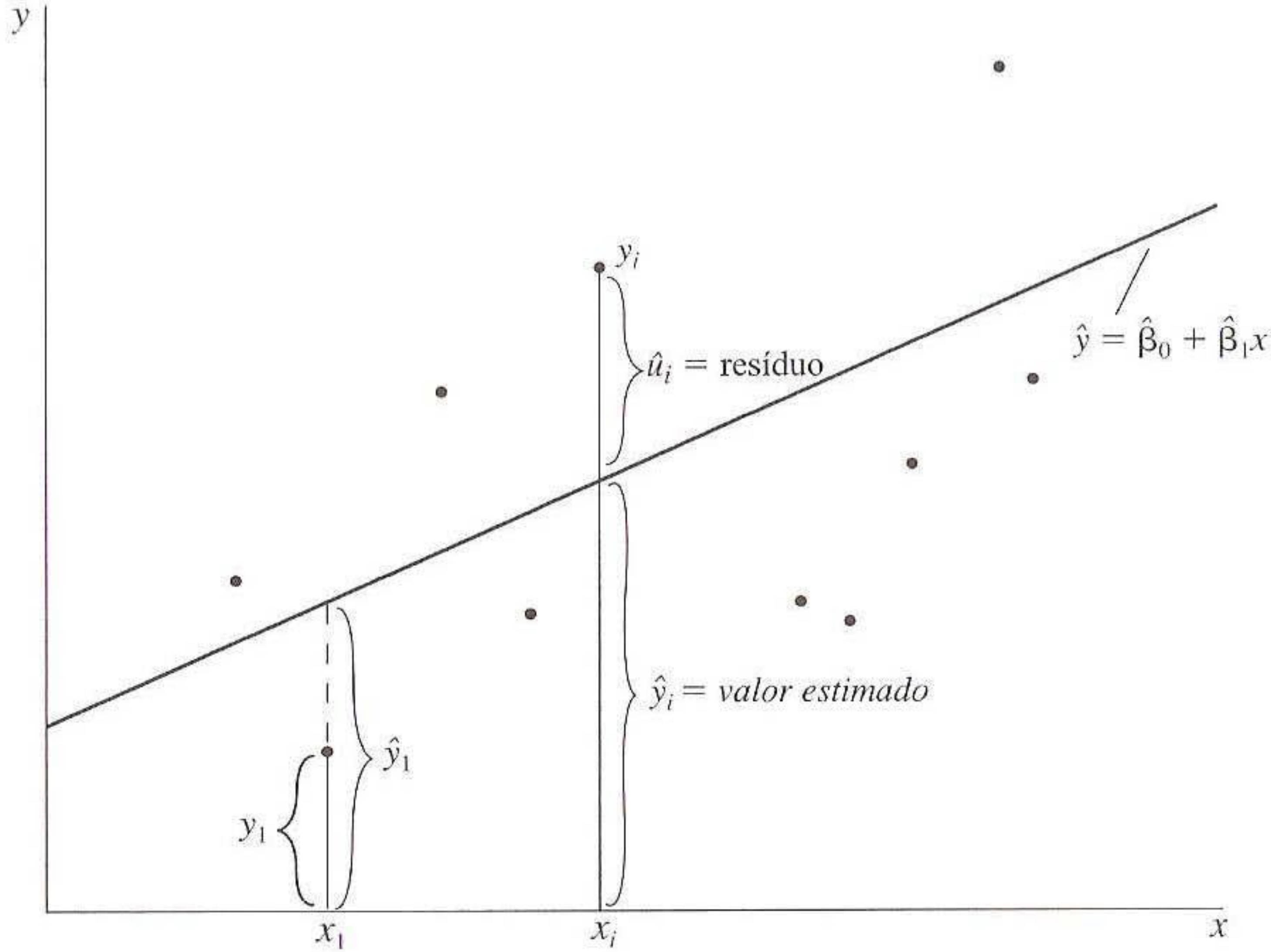
$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

– O resíduo é a diferença entre o valor verdadeiro de y_i e seu valor estimado:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$$

Figura 2.4

Valores estimados e resíduos.



MINIMIZANDO A SOMA DOS RESÍDUOS QUADRADOS

– Suponha que escolhemos o intercepto e a inclinação estimados com o propósito de tornar a soma dos resíduos quadrados:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)^2$$

– O nome “mínimos quadrados ordinários” é utilizado porque as estimativas do intercepto e da inclinação minimizam a soma dos resíduos quadrados.

– Não é utilizada a minimização dos valores absolutos dos resíduos, porque a teoria estatística para isto seria muito complicada.

MINIMIZANDO A SOMA DOS RESÍDUOS QUADRADOS

– Reta de regressão de MQO ou função de regressão amostral (FRA) é a versão estimada da função de regressão populacional (FRP):

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

– O coeficiente de inclinação indica o quanto o valor estimado (previsto) de y varia quando x aumenta em uma unidade:

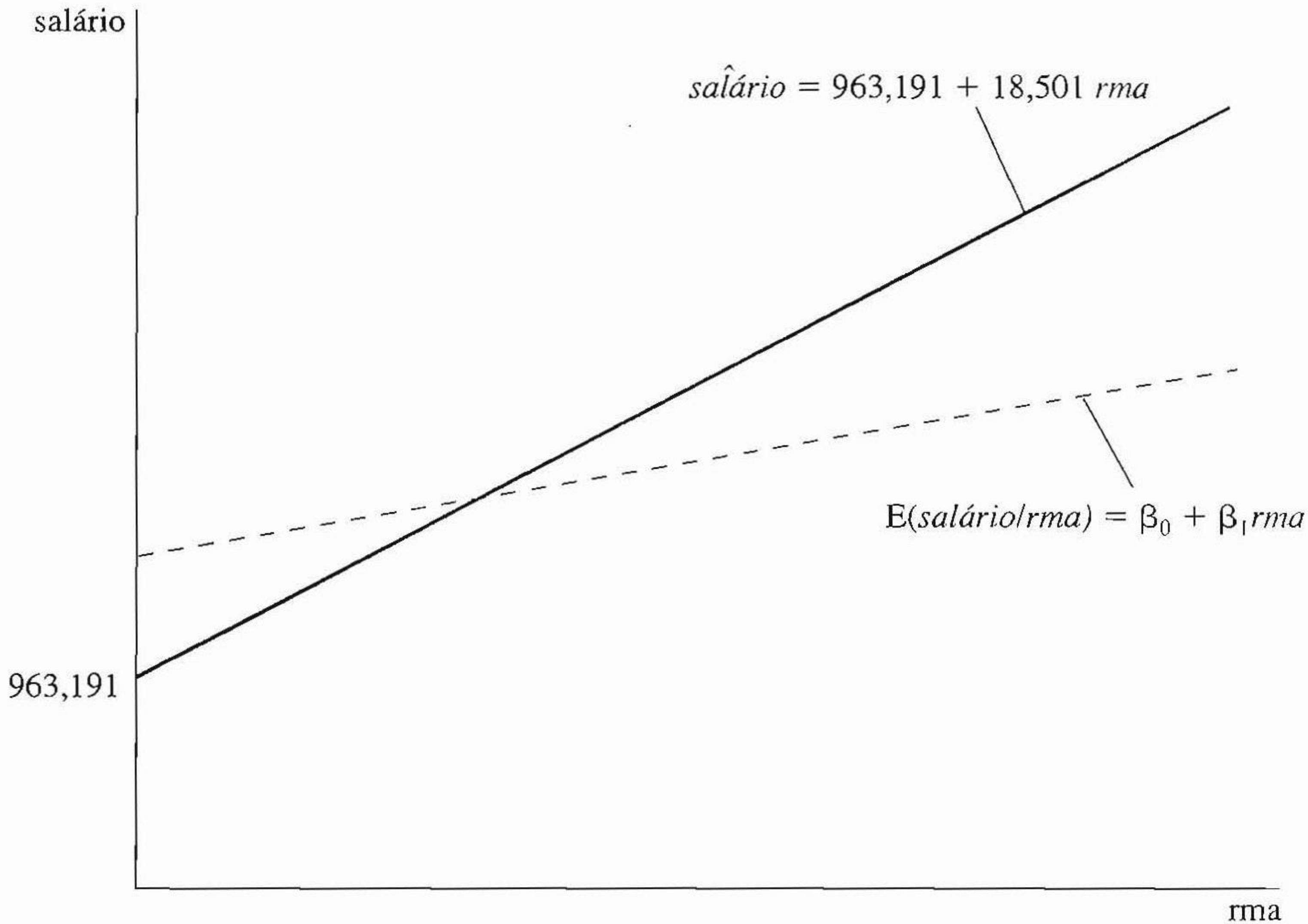
$$\hat{\beta}_1 = \Delta\hat{y}/\Delta x$$

– Da mesma forma, dada qualquer variação em x, podemos calcular a variação prevista em y:

$$\Delta\hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x$$

Figura 2.5

A reta de regressão de MQO $\widehat{salário}$ = 963,191 + 18,501 *rma* e a função de regressão populacional (desconhecida).



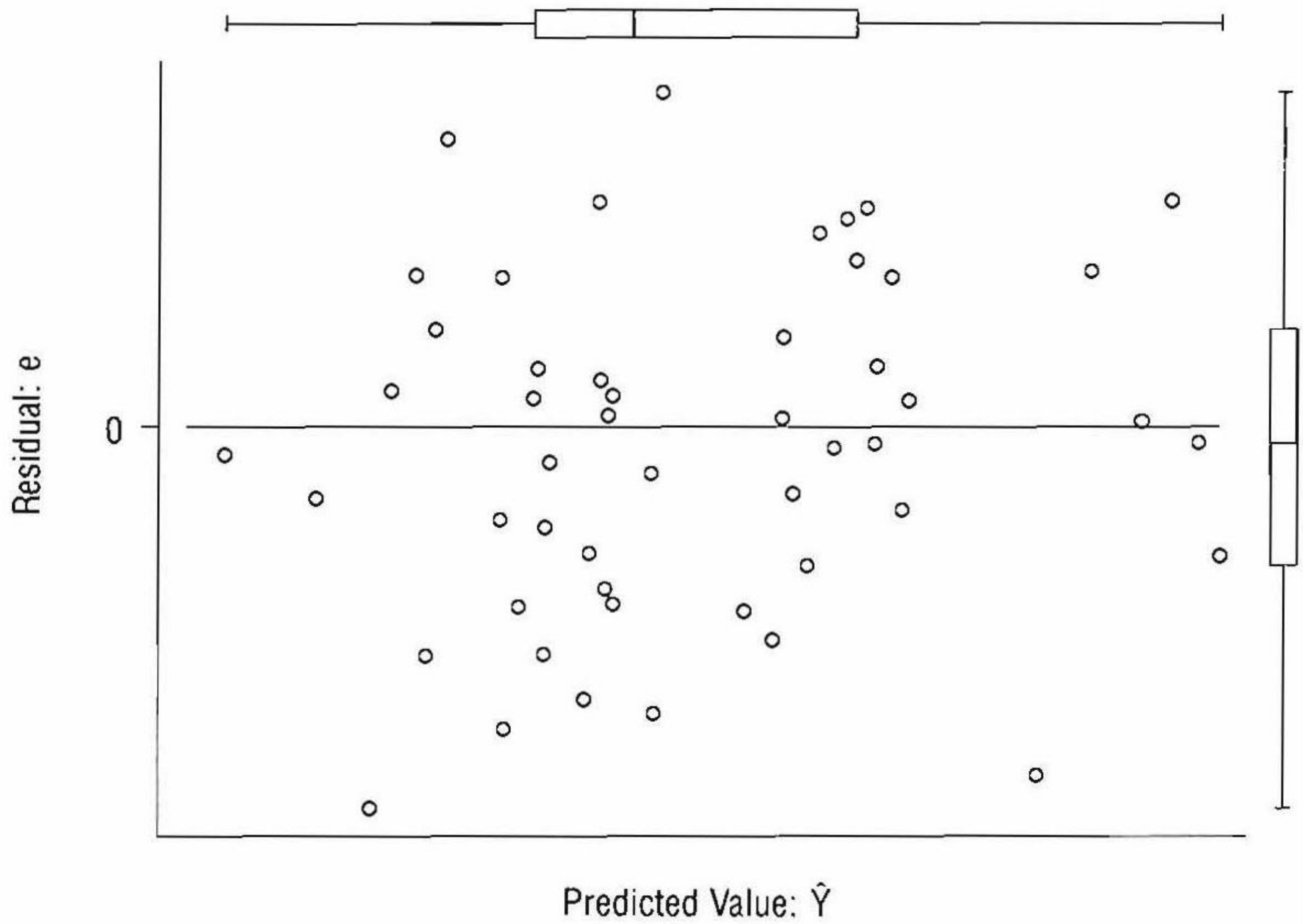


Figure 2.10 "All clear" e-versus-$\hat{Y}$ plot (artificial data).

Fonte: Hamilton, 1992: 52.

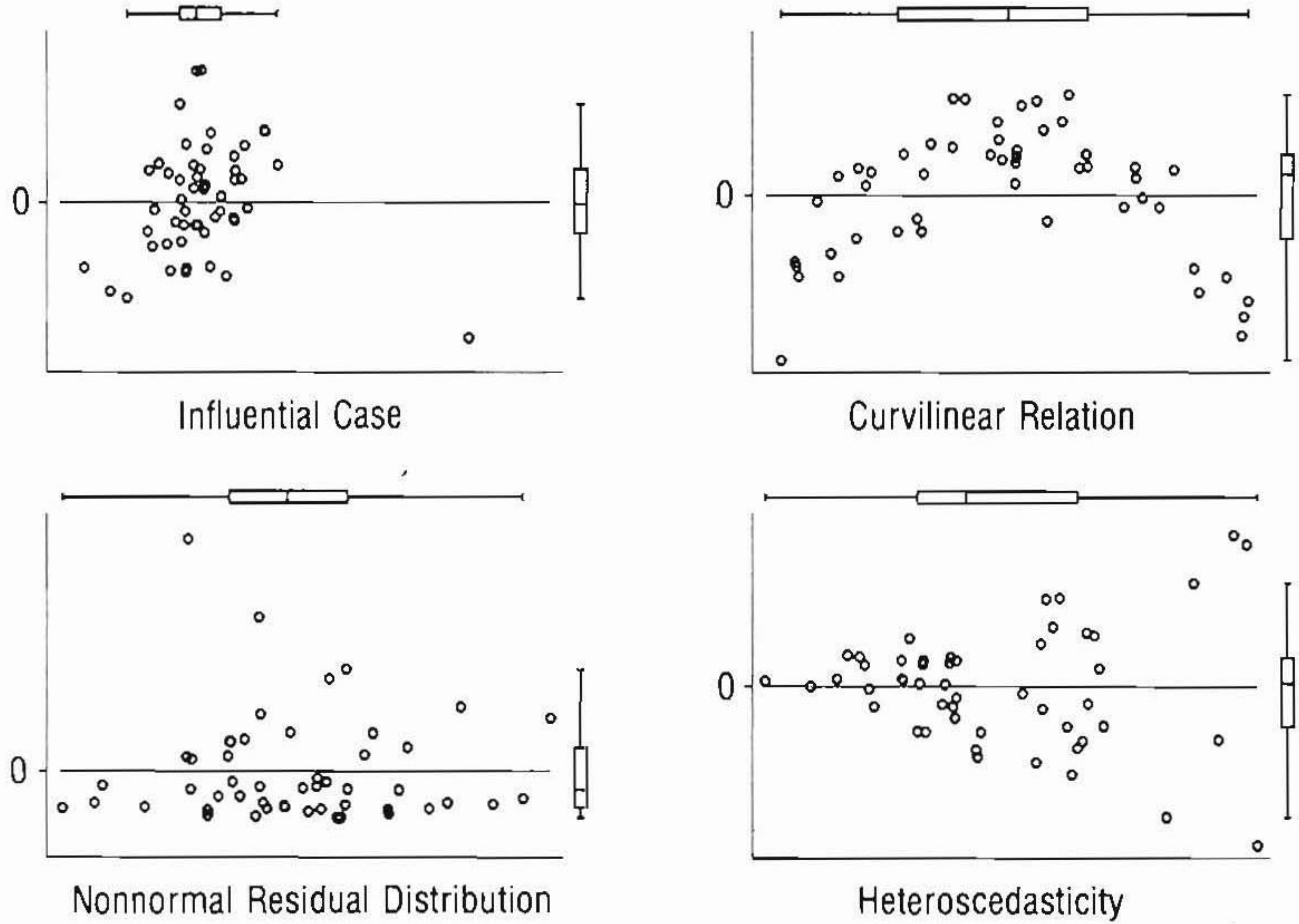


Figure 2.11 Examples of trouble seen in e-versus-$\hat{Y}$ plots (artificial data).

Fonte: Hamilton, 1992: 53.

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DAS ESTATÍSTICAS

– A soma dos resíduos de MQO é zero, já que as estimativas de MQO de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ são escolhidas para fazer com que a soma dos resíduos seja zero:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = 0$$

– A covariância amostral entre os regressores e os resíduos de MQO é zero:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i\right)}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{u}_i = 0$$

– Se inserirmos a média de x no lugar de x_i, o valor estimado é a média de y (este ponto está sempre sobre a reta):

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

SOMAS DOS QUADRADOS

– Soma dos quadrados total (SQT) é uma medida da variação amostral total em y_i (mede a dispersão dos y_i na amostra):

$$SQT = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

– Soma dos quadrados explicada (SQE) mede a variação amostral em:

$$SQE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

– Soma dos quadrados dos resíduos (SQR) mede a variação amostral em:

$$SQR = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$$

–Variação total em y é a soma da variação explicada e da variação não-explicada:

$$SQT = SQE + SQR$$

GRAU DE AJUSTE

– Visa mensurar o quanto bem a variável independente (x) explica a variável dependente (y).

– É um número que resume o quão bem a reta de regressão de MQO se ajusta aos dados.

– R^2: razão entre a variação explicada (SQE) e a variação total (SQT).

– R^2: fração da variação amostral em y que é explicada por x.

$$SQT = SQE + SQR$$

$$SQT/SQT = (SQE + SQR)/SQT$$

$$1 = SQE/SQT + SQR/SQT$$

$$SQE/SQT = 1 - SQR/SQT$$

– Usar o R^2 como principal padrão de medida de sucesso de uma análise econométrica pode levar a confusões.

MUDANÇAS DAS UNIDADES DE MEDIDA

– Ao mudar unidades de medida das variáveis dependente e/ou independente, estimativas de MQO são afetadas.

– Se a **variável dependente** é multiplicada pela constante *c* (cada valor na amostra é multiplicado por *c*), então as estimativas de MQO de intercepto e de inclinação também são multiplicadas por *c*.

– Se a **variável independente** é dividida (ou multiplicada) por alguma constante diferente de zero (*c*) então o coeficiente de inclinação de MQO é multiplicado (ou dividido) por *c*, respectivamente.

– Mudar as unidades de medida da variável independente não afeta o intercepto.

– O grau de ajuste do modelo (R^2) não depende das unidades de medida das variáveis.

NÃO-LINEARIDADE NA REGRESSÃO SIMPLES

– Formas funcionais populares usadas em economia e outras ciências sociais aplicadas podem ser incorporadas à análise de regressão.

– Até agora foram analisadas relações lineares entre as variáveis dependente e independente.

– No entanto, relações lineares não são suficientes para todas as aplicações econômicas e sociais.

– É fácil incorporar não-linearidade na análise de regressão simples.

EXEMPLO DE NÃO-LINEARIDADE

– Para cada ano adicional de educação, há um aumento fixo no salário. Esse é o aumento tanto para o primeiro ano de educação quanto para anos mais avançados:

$$salário = \beta_0 + \beta_1 educ + u$$

– Suponha que o aumento percentual no salário é o mesmo, dado um ano a mais de educação formal. Um modelo que gera um efeito percentual constante é dado por:

$$log(salário) = \beta_0 + \beta_1 educ + u$$

– Se $\Delta u = 0$, então:

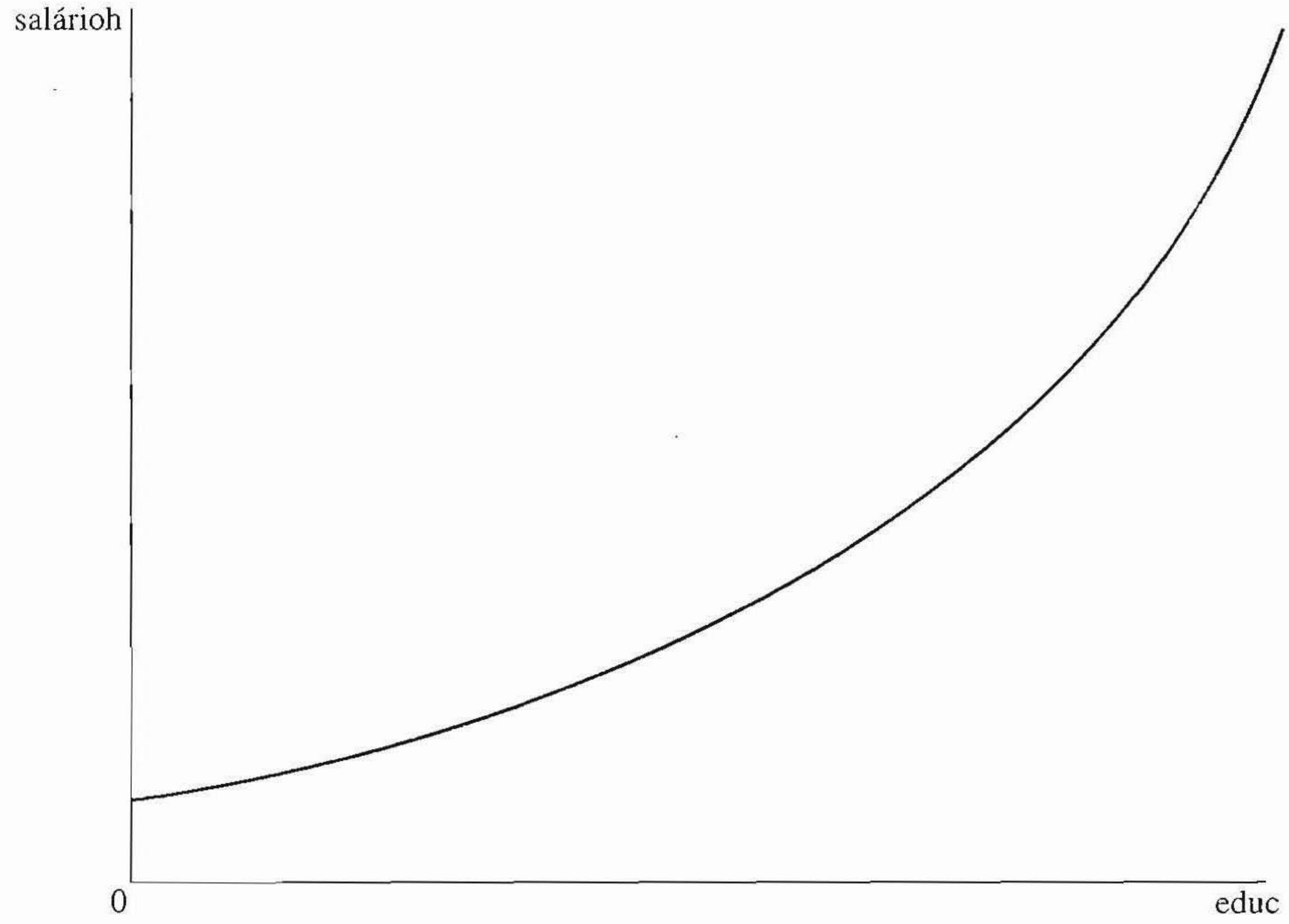
$$\%\Delta salário = (100 * \beta_1)\Delta educ$$

– Para cada ano adicional de educação, há um aumento de ?% sobre o salário.

– Como a variação percentual no salário é a mesma para cada ano adicional de educação, a variação no salário aumenta quando a educação formal aumenta.

Figura 2.6

salárioh = $\exp(\beta_0 + \beta_1 educ)$, *com* $\beta_1 > 0$.



INTERPRETAÇÃO DOS COEFICIENTES

– Aumento de uma unidade em x aumenta y em β_1 unidades:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

– Aumento de 1% em x aumenta y em (β_1/100) unidades:

$$y = \beta_0 + \beta_1 log(x) + u$$

– Aumento de uma unidade em x aumenta y em (100*β_1)%:

$$log(y) = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

– Aumento de 1% em x aumenta y em β_1%:

$$log(y) = \beta_0 + \beta_1 log(x) + u$$

– Este último é o modelo de elasticidade constante.

– Elasticidade é a razão entre o percentual de mudança em uma variável e o percentual de mudança em outra variável.

FORMAS FUNCIONAIS ENVOLVENDO LOGARITMOS

Modelo	**Variável Dependente**	**Variável Independente**	**Interpretação de β_1**
nível-nível	y	x	$\Delta y=\beta_1\Delta x$
nível-log	y	log(x)	$\Delta y=(\beta_1/100)\%\Delta x$
log-nível	log(y)	x	$\%\Delta y=(100\beta_1)\Delta x$
log-log	log(y)	log(x)	$\%\Delta y=\beta_1\%\Delta x$

SIGNIFICADO DE REGRESSÃO LINEAR

– O modelo de regressão linear permite relações não-lineares.

– Esse modelo é linear nos parâmetros: β_0 e β_1.

– Não há restrições de como y e x se relacionam com as variáveis dependente e independente originais, já que podemos utilizar: logaritmo natural, quadrado, raiz quadrada...

– A interpretação dos coeficientes depende das definições de como x e y são construídos.

– "É muito mais importante tornar-se proficiente em interpretar coeficientes do que eficiente no cálculo de fórmulas." (Wooldridge, 2008: 45)