

AULA 31

Heteroscedasticidade

Ernesto F. L. Amaral

Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)

Fonte:

Wooldridge, Jeffrey M. "Introdução à econometria: uma abordagem moderna". São Paulo: Cengage Learning, 2008. Capítulo 8 (pp.243-271).

HOMOSCEDASTICIDADE

- A hipótese de homoscedasticidade para a regressão múltipla significa que a variância do erro não observável (u), condicional nas variáveis explicativas, é constante.
- A homoscedasticidade não se mantém quando a variância dos fatores não-observáveis muda ao longo de diferentes segmentos da população.
- Por exemplo, a heteroscedasticidade está presente se a variância dos fatores não-observados (u) que afetam a renda (y) aumenta com a idade (x).
- A homoscedasticidade é necessária para estimar os testes de t e F , além dos intervalos de confiança.
- A intenção aqui é de: (1) discorrer sobre as consequências da heteroscedasticidade para estimação de MQO; (2) verificar a presença da heteroscedasticidade; (3) discutir soluções para a ocorrência deste problema.

β_j E R^2 NA HETEROSCEDASTICIDADE

- A heteroscedasticidade não provoca viés ou inconsistência nos estimadores MQO de β_j , enquanto a omissão de uma variável importante teria esse efeito.
- O R^2 da população é:
 - 1 – (variância do erro / variância de y)
- Como ambas variâncias no R^2 da população são incondicionais, o R^2 da população não é afetado pela presença de heteroscedasticidade em $\text{Var}(u|x_1, \dots, x_k)$.
- SQR/n estima consistentemente a variância do erro, e SQT/n estima consistentemente a variância de y , seja $\text{Var}(u|x_1, \dots, x_k)$ constante ou não.
- Portanto R^2 e R^2 ajustados são estimadores consistentes do R^2 da população, mantendo ou não a hipótese de homoscedasticidade.

ERROS-PADRÃO NA HETEROSCEDASTICIDADE

- Os estimadores de variâncias [$\text{Var}(\beta_j)$] são viesados sem a hipótese de homoscedasticidade.
- Como os erros-padrão dos estimadores MQO são baseados diretamente nessas variâncias, eles não mais são válidos para construirmos intervalos de confiança e estatísticas t .
- Na presença de heteroscedasticidade, as estatísticas t não têm distribuições t , as estatísticas F não têm distribuição F , e a estatística LM não tem distribuição qui-quadrada.
- Portanto, as estatísticas que usamos para testar hipóteses não são válidas na presença de heteroscedasticidade.
- Os estimadores MQO são os melhores estimadores lineares não-viesados na hipótese de homoscedasticidade: isso ocorre quando $\text{Var}(u|x)$ for constante.

INFERÊNCIA ROBUSTA

- É possível ajustar erros-padrão, estatísticas t , F e LM de forma a torná-las válidas na presença de heteroscedasticidade de forma desconhecida.
- Isso significa que é possível descrever novas estatísticas que funcionam independentemente do tipo de heteroscedasticidade presente na população.
- Esses métodos são os procedimentos robustos em relação à heteroscedasticidade, já que são válidos mesmo que a variância dos erros não seja constante.
- É possível então estimar variâncias consistentes na presença de heteroscedasticidade.
- A aplicação de métodos robustos em relação à heteroscedasticidade é bastante fácil, pois muitos programas estatísticos e econométricos calculam essas estatísticas como uma opção.

ESTIMANDO VARIÂNCIA COM HETEROSCEDASTICIDADE ⁶

- No caso da regressão simples e sem a hipótese de homoscedasticidade, a variância do estimador é:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sigma_i^2}{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2]^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sigma_i^2}{SQT_x^2}$$

- Quando $\sigma_i^2 = \sigma^2$ para todo i , a fórmula se reduz a: σ^2/SQT_x .
- Quando $\sigma_i^2 \neq \sigma^2$ (heteroscedasticidade), a variância derivada sob homoscedasticidade não é mais válida.
- Como o erro-padrão é baseado diretamente na estimativa da variância, é preciso estimar a equação acima quando a heteroscedasticidade está presente.
- Sendo u_i os resíduos da regressão simples de y sobre x , um estimador válido da variância para a heteroscedasticidade é:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \hat{u}_i^2}{SQT_x^2}$$

EM REGRESSÃO MÚLTIPLA

- No caso de: (1) regressão múltipla; (2) r_{ij} ser o i -ésimo resíduo da regressão de x_j sobre todas as outras variáveis independentes; e (3) SQR_j ser a soma dos resíduos quadrados da regressão, temos:

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{r}_{ij}^2 \hat{u}_i^2}{SQR_j^2}$$

- A raiz quadrada desta fórmula é o erro-padrão robusto em relação à heteroscedasticidade de beta estimado.
- Os erros-padrão robustos são atribuídos a White (1980).
- A estatística t robusta em relação à heteroscedasticidade é calculada após obter os erros-padrão robustos:

$$t = \frac{\textit{estimativa} - \textit{valor hipotético}}{\textit{erro padrão}}$$

ERROS-PADRÃO USUAIS E ROBUSTOS

- Geralmente, os erros-padrão robustos são frequentemente maiores do que os erros-padrão usuais.
- Os erros-padrão robustos podem ser estimados mesmo sem que se saiba se a heteroscedasticidade está presente.
- Os novos erros-padrão são válidos (assimptoticamente) haja ou não presença de heteroscedasticidade.
- Com frequência, as diferenças entre os erros-padrão usuais e os robustos são pequenas.
- Erros-padrão usuais podem ser usados se a hipótese de homoscedasticidade se mantiver e erros forem normalmente distribuídos, já que estatísticas t usuais terão distribuições t .
- Em amostras pequenas, as estatísticas t robustas podem ter distribuições que não sejam próximas da distribuição t .
- Em amostras grandes, sempre podemos levar em conta somente os erros-padrão robustos.

ESTATÍSTICAS *F* E *LM*

- É possível obter estatísticas *F* e *LM* robustas em relação à heteroscedasticidade de forma desconhecida.
- A estatística *F* robusta em relação à heteroscedasticidade é chamada de estatística de Wald robusta em relação à heteroscedasticidade.
- O cálculo do teste *F* robusto não tem uma forma simples, mas pode ser computado por alguns programas estatísticos.

MULTIPLICADOR DE LAGRANGE (*LM*) ROBUSTO

- Nem todos programas econométricos calculam estatísticas F que sejam robustas em relação à heteroscedasticidade.
- Uma estatística LM robusta pode ser obtida manualmente em qualquer programa econométrico:
 1. Obtenha os resíduos u do modelo restrito.
 2. Faça a regressão de cada uma das variáveis independentes excluídas, conforme a hipótese nula, sobre todas as variáveis independentes incluídas, e salve os resíduos (r_1, r_2, \dots, r_q) .
 3. Encontre os produtos de cada r_j por u (para todas as observações).
 4. Faça a regressão de 1 sobre r_1u, r_2u, \dots, r_qu , sem um intercepto.
 5. Use a soma dos resíduos quadrados da última regressão para calcular a estatística LM robusta $(n - SQR)$, a qual terá distribuição de qui-quadrado.

TESTE DE EXISTÊNCIA DE HETEROSCEDASTICIDADE

- Os erros-padrão robustos em relação à heteroscedasticidade oferecem um método simples para calcular estatísticas t que sejam assintoticamente distribuídas como t , haja ou não a presença de heteroscedasticidade.
- Porém, há razões para saber se realmente há presença de heteroscedasticidade, antes de estimar erros-padrão robustos:
 - As estatísticas t usuais são preferíveis se não há heteroscedasticidade.
 - É possível obter um estimador melhor que o MQO quando a forma da heteroscedasticidade é conhecida.

TESTE DE EXISTÊNCIA DE HETEROSCEDASTICIDADE

- Considere um modelo linear:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + u$$

- A hipótese nula de que a homoscedasticidade se mantém é:

$$H_0: \text{Var}(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = \sigma^2$$

- Precisamos analisar os dados para saber se a hipótese nula é adequada ou não.
- Se não rejeitamos H_0 , concluímos que a heteroscedasticidade não será um problema.
- Como u tem esperança condicional zero, $\text{Var}(u|x) = E(u^2|x)$, e a hipótese nula será:

$$H_0: E(u^2|x_1, x_2, \dots, x_k) = E(u^2) = \sigma^2$$

TESTE F DE EXISTÊNCIA DE HETEROSCEDASTICIDADE

- Estimamos então esta equação:

$$\hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k + \text{erro}$$

- Utilizando o R^2 da equação acima e o número de regressores (k), estimamos a estatística F :

$$F = \frac{R_{\hat{u}^2}^2 / k}{(1 - R_{\hat{u}^2}^2) / (n - k - 1)}$$

- A estatística F tem uma distribuição $F_{k, n-k-1}$ sob a hipótese nula de homoscedasticidade, permitindo o cálculo de sua significância.

TESTE *LM* DE EXISTÊNCIA DE HETEROSCEDASTICIDADE¹⁴

- A estatística *LM* para a heteroscedasticidade é o tamanho da amostra multiplicado pelo R^2 da equação com u^2 como variável dependente:

$$LM = n * R_{\hat{u}^2}^2$$

- Essa versão *LM* do teste é geralmente chamada teste de Breusch-Pagan da heteroscedasticidade (teste BP).

RESUMINDO O TESTE BP

- Estime o modelo MQO em que y é a variável dependente e obtenha os resíduos quadrados (u^2) para cada observação.
- Estime o modelo em que u é a variável dependente para obter o R-quadrado.
- Construa a estatística F e calcule o p-valor usando a distribuição $F_{k,n-k-1}$.
- Construa a estatística LM e calcule o p-valor usando a distribuição de qui-quadrado.
- Se o p-valor ficar abaixo do nível de significância selecionados, então rejeitamos a hipótese nula de homoscedasticidade.
- Se for constatada que não há homoscedasticidade, os erros-padrão robustos em relação à heteroscedasticidade e suas estatísticas de testes poderão ser utilizadas.
- Sabemos ainda que há menos heteroscedasticidade com a variável dependente em forma logarítmica.

TESTE DE WHITE PARA HETEROSCEDASTICIDADE

- A hipótese de homoscedasticidade $[\text{Var}(u|x_1, \dots, x_k)]$ pode ser substituída por outra hipótese:
 - O erro quadrado (u^2) é não-correlacionado com:
 - Todas as variáveis independentes (x_j).
 - Os quadrados das variáveis independentes (x_j^2).
 - Todos os produtos cruzados ($x_j x_h$ para $j \neq h$).
- White sugeriu testar formas de heteroscedasticidade que invalidem os erros-padrão e as estatísticas de testes.
- Para um modelo com três variáveis independentes, temos:

$$\begin{aligned} \hat{u}^2 = & \delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \\ & \delta_4 x_1^2 + \delta_5 x_2^2 + \delta_6 x_3^2 + \\ & \delta_7 x_1 x_2 + \delta_8 x_1 x_3 + \delta_9 x_2 x_3 + \textit{erro} \end{aligned}$$

- O teste de White para a heteroscedasticidade é a estatística LM para testar se todos δ_j na equação sejam zero, exceto δ_0 .

TESTE DE WHITE PARA HETEROSCEDASTICIDADE

- O teste de White usa muitos graus de liberdade para modelos com um número moderado de variáveis independentes.
- É possível obter um teste que seja mais facilmente implementado que o teste de White.
- Uma sugestão é usar os valores estimados MQO para verificar a existência de heteroscedasticidade.
- Os valores estimados são apenas funções lineares das variáveis independentes.
- Se eles forem elevados ao quadrado, estamos na prática obtendo uma função particular de todos os quadrados e produtos cruzados das variáveis independentes:

$$\hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 \hat{y} + \delta_2 \hat{y}^2 + \textit{erro}$$

- Podemos usar as estatísticas F ou LM para a hipótese nula:

$$H_0: \delta_1 = 0, \delta_2 = 0$$

RESUMINDO O TESTE DE WHITE

- Estime o modelo MQO em que y é a variável dependente e obtenha os resíduos (u) e os valores estimados de y .
- Calcule os resíduos quadrados (u^2) e os quadrados dos valores estimados.
- Estime o modelo em que u é a variável dependente e y e y^2 sejam as variáveis independentes para obter o R^2 .
- Construa a estatística F e calcule o p-valor usando a distribuição $F_{2,n-3}$.
- Construa a estatística LM e calcule o p-valor usando a distribuição de qui-quadrado.
- Se o p-valor ficar abaixo do nível de significância selecionados, então rejeitamos a hipótese nula de homoscedasticidade.

CONSIDERAÇÃO IMPORTANTE

- Se omitirmos um ou mais termos quadráticos em um modelo de regressão ou usarmos o modelo em nível ao invés de usar o log, um teste de heteroscedasticidade pode vir a ser significativo, rejeitando a hipótese de homoscedasticidade.
- Isso tem levado alguns pesquisadores a verem estes testes como testes de má especificação do modelo:
 - Porém, há outros testes que podem testar melhor a má especificação de formas funcionais das variáveis.
- Ou seja, é mais apropriado:
 - Primeiro, realizar testes específicos de formas funcionais, já que a má especificação da forma funcional é mais importante que a heteroscedasticidade.
 - Depois de satisfeitos com as formas funcionais das variáveis, estimar o teste para verificar a existência de heteroscedasticidade.

ESTIMAÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS PONDERADOS

- Se for detectada heteroscedasticidade com o uso de testes estatísticos, é possível estimar erros padrão robustos em relação à heteroscedasticidade após a estimação MQO.
- Porém, antes das estatísticas robustas, é possível modelar e estimar a forma específica da heteroscedasticidade, calculando um estimador mais eficiente que o MQO, além de estatísticas t e F não enviesadas.
- Isso requer mais trabalho, pois é preciso ser específico sobre a natureza de qualquer heteroscedasticidade.

CONSTANTE MULTIPLICATIVA

- Considere que \mathbf{x} representa todas as variáveis explicativas em:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + u$$

- Assuma que $h(\mathbf{x})$ é alguma função das variáveis explicativas que determina a heteroscedasticidade:

$$Var(u|\mathbf{x}) = \sigma^2 h(\mathbf{x})$$

- Como variâncias devem ser positivas, $h(\mathbf{x}) > 0$ para todos valores possíveis das variáveis independentes.
- Supomos que a função $h(\mathbf{x})$ é conhecida. Assim, mesmo que o parâmetro populacional σ^2 seja desconhecido, teremos condições de estimá-lo a partir de uma amostra de dados.

EQUAÇÃO TRANSFORMADA

- Com o objetivo de obter estimadores de β_j que tenham propriedades de eficiência melhores que MQO, estimamos esta equação:

$$y_i/\sqrt{h_i} = \beta_0/\sqrt{h_i} + \beta_1(x_{i1}/\sqrt{h_i}) + \dots + \beta_k(x_{ik}/\sqrt{h_i}) + u_i/\sqrt{h_i}$$

- Esta equação é linear em seus parâmetros (RLM.1), a hipótese de amostragem aleatória não se alterou (RLM.2), o termo de erro tem média condicional zero (RLM.3) e não há colinearidade perfeita entre variáveis independentes (RLM.4).
- A equação transformada satisfará as hipóteses do modelo linear clássico, se o modelo original também o fizer, com exceção da hipótese de homoscedasticidade (RLM.5).

MÍNIMOS QUADRADOS GENERALIZADOS (MQG)

- É necessário estimar os parâmetros da nova equação por mínimos quadrados ordinários.
- Os novos betas são estimadores de mínimos quadrados generalizados (MQG).
- Estes estimadores MQG são usados para explicar a heteroscedasticidade nos erros.
- Os erros-padrão, estatísticas t e estatísticas F podem ser obtidas de regressões que usem as variáveis transformadas.
- Por serem os melhores estimadores lineares não-viesados de beta, os estimadores MQG são mais eficientes que os estimadores MQO.
- A interpretação dos resultados deve ser feita com base na equação original.
- O R^2 indica o quanto da variação do novo y é explicado pelo novo x , o que não é informativo como grau de ajuste.

MÍNIMOS QUADRADOS PONDERADOS (MQP)

- Os estimadores de mínimos quadrados generalizados (MQG) para correção da heteroscedasticidade são chamados de estimadores de mínimos quadrados ponderados (MQP).
- Os novos betas minimizam a soma ponderada dos quadrados dos resíduos.
- A idéia é colocar menos peso nas observações com uma variância de erro mais alta.
- O método MQO atribui pesos iguais a todas as observações, pois isso é melhor quando a variância do erro é idêntica para todas as partições da população.

MÍNIMOS QUADRADOS PONDERADOS (MQP)

- A maioria dos programas econométricos tem um recurso para computar mínimos quadrados ponderados.
- Juntamente com as variáveis dependentes e independentes originais, especificamos a função de ponderação ($1/h_i$).
- Especificamos pesos proporcionais ao inverso da variância.
- Isso nos permite interpretar as estimativas de mínimos quadrados ponderados no modelo original.
- Podemos escrever a equação estimada da maneira habitual.
- As estimativas e os erros-padrão serão diferentes do MQO, mas a maneira como interpretamos essas estimativas, erros-padrão e estatísticas de testes é a mesma.
- Esse procedimento corrige estimativas dos betas (aweight).
- Se considerarmos que a heteroscedasticidade seria um problema para os erros-padrão, deveríamos computar também os erros-padrão robustos (pweight).

MAS NA PRÁTICA...

- Na prática, raramente sabemos como a variância do erro se comporta em relação a uma variável independente.
- Em equações de regressão múltipla, é complicado saber com qual variável independente há heteroscedasticidade nos erros e qual a forma deste problema.
- Existe um caso no qual os pesos necessários para o MQP surgem naturalmente de um modelo econométrico subjacente.
- Isso acontece quando os dados estão em médias de algum grupo ou região, e não em nível individual.

DADOS EM MÉDIAS POR GRUPOS

– Se a equação no nível individual satisfizer a hipótese de homoscedasticidade, então a equação do nível agrupado deverá ter heteroscedasticidade.

– Assim, se para todo grupo i e indivíduo j :

$$\text{Var}(u_{i,j}) = \sigma^2$$

– Então, a variância do termo de erro médio diminui com o tamanho do grupo:

$$\text{Var}(\bar{u}_i) = \sigma^2/m_i$$

– Neste caso, $h_i = 1/m_i$.

– Portanto, o procedimento mais eficiente será o dos mínimos quadrados ponderados, com pesos correspondentes ao número de indivíduos nos grupos ($1/h_i = m_i$).

– Isso garante que grupos maiores recebam peso maior, o que oferece método eficiente de estimação dos parâmetros no modelo em nível individual quando temos médias.

HETEROSCEDASTICIDADE NO NÍVEL INDIVIDUAL

- Se no caso anterior existisse heteroscedasticidade no nível individual, então a ponderação adequada dependerá da forma da heteroscedasticidade.
- Por isso, vários pesquisadores simplesmente computam erros-padrão e estatísticas de teste robustos na estimação de modelos que usam dados agrupados.
- Uma alternativa é realizar a ponderação pelo tamanho do grupo (*aweight*), além de estimar as estatísticas robustas em relação à heteroscedasticidade na estimação MQP (*pweight*).
- Isso assegura que qualquer heteroscedasticidade no nível individual seja representada pela inferência robusta.

MQG FACTÍVEL

- Ao contrário dos exemplos anteriores, a forma exata de heteroscedasticidade não é óbvia na maioria dos casos.
- Em muitos casos podemos modelar a função h e utilizar os dados para estimar os parâmetros desconhecidos.
- O uso de h_i -chapéu em lugar de h_i na transformação MQG produz o estimador de mínimos quadrados generalizados factível (MQGF), também chamado de MQG estimado (MQGE).
- Existem várias maneiras de modelar a heteroscedasticidade, mas iremos utilizar um método razoavelmente flexível:

$$\text{Var}(u|\mathbf{x}) = \sigma^2 \exp(\delta_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_k x_k)$$

- É utilizada função exponencial porque modelos lineares não asseguram que os valores previstos sejam positivos, e as variâncias estimadas devem ser positivas para usar o MQP.

ESTIMAÇÃO DO MQG FACTÍVEL

- Para estimar os parâmetros δ_i é preciso transformar a equação anterior em uma forma linear para ser estimada por MQO:

$$\log(u^2) = \alpha_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_k x_k + e$$

- Na prática (pág. 263):

1. Execute a regressão de y sobre x_1, x_2, \dots, x_k e obtenha os resíduos de \hat{u} .
2. Crie $\log(\hat{u}^2)$ elevando ao quadrado os resíduos MQO e depois calculando seu log natural.
3. Execute a regressão na equação acima dos parâmetros δ_i [ou $\log(u^2)$ sobre y, y^2] e obtenha os valores estimados.
4. Calcule o exponencial dos valores estimados, resultando em: \hat{h} .
5. Estime a equação $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + u$, pelo método MQP, usando pesos (aweight) $1/\hat{h}$.

ESTATÍSTICAS F

- Ao calcular estatísticas F , é importante que os mesmos pesos sejam usados para estimar os modelos com e sem restrições.
- Devemos estimar o modelo sem restrições por MQO com os pesos.
- Usamos os mesmos pesos para estimar o modelo restrito.
- Posteriormente, a estatística F pode ser calculada.
- Lembrem-se que o Stata permite utilizar o comando “test” para testar restrições conjuntas após a estimação de um modelo, não sendo necessário calcular manualmente a regressão restrita.

MODELO DE PROBABILIDADE LINEAR REVISITADO

- Quando a variável dependente é binária, o modelo deve conter heteroscedasticidade, a menos que todos parâmetros de inclinação sejam nulos.
- A maneira mais simples de tratar a heteroscedasticidade neste caso é usar a estimação MQO, e calcular os erros-padrão robustos nas estatísticas de testes.
- As estimativas MQO do MPL são simples e geralmente produzem resultados satisfatórios, mas são ineficientes.
- É possível utilizar o MQP para estimar o MPL. No entanto, o método falhará se \hat{h} for negativo (ou zero) em qualquer observação.

ESTIMAÇÃO DO MPL POR MQP

- Estime o modelo por MQO e obtenha os valores estimados de y .
- Verifique se todos os valores estimados estão dentro do intervalo unitário:
 - Se assim for, prossiga para o passo seguinte.
 - Caso contrário, alguns ajustes serão necessários para trazer todos os valores estimados para dentro do intervalo unitário:
 - $y_i = 0,01$ se $y_i < 0$
 - $y_i = 0,99$ se $y_i > 1$
- Construa as variâncias estimadas com esta equação:

$$\hat{h}_i = \hat{y}_i(1 - \hat{y}_i)$$

- Estime a equação $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + u$, pelo método MQP, usando pesos (aweight) $1/\hat{h}$.