

# **AULA EXTRA**

# **Análise de Regressão Logística**

**Ernesto F. L. Amaral**

**13 de dezembro de 2012**  
**Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)**

## VARIÁVEL DEPENDENTE BINÁRIA

- O modelo de regressão logístico é utilizado quando a variável resposta é qualitativa com dois resultados possíveis.
- Probabilidade de sucesso =  $p$
- Probabilidade de fracasso =  $1 - p = q$
- Chance = (prob. de sucesso) / (prob. de fracasso)
- Por exemplo, se a probabilidade de sucesso é 0,75, a chance é igual a:

$$p / (1 - p) = p / q = 0,75 / 0,25 = 3$$

## RAZÃO DE CHANCES

– Razão de chances para variáveis dependentes binárias é a razão entre a chance de uma linha (ou coluna) de uma tabela 2x2, dividida pela chance da outra linha (ou coluna):

$$\frac{A}{B} = \frac{p_1 / (1 - p_1)}{p_2 / (1 - p_2)} = \frac{p_1 * (1 - p_2)}{p_2 * (1 - p_1)}$$

# EXEMPLO DE CÁLCULO DE RAZÃO DE CHANCES

Sexo	Dilma	Serra	Total
Homem	52	39	91
Mulher	43	44	87
<b>Total</b>	<b>95</b>	<b>83</b>	<b>178</b>

– **Chance** de votar na Dilma entre homens:

$$p_1 / (1-p_1) = (52/91) / (39/91) = 0,57 / 0,43 = 1,33$$

– **Chance** de votar na Dilma entre mulheres:

$$p_2 / (1-p_2) = (43/87) / (44/87) = 0,49 / 0,51 = 0,96$$

– **Razão de chances** de votar na Dilma entre homens, em relação às mulheres:

$$[p_1 / (1- p_1 )] / [p_2 / (1- p_2 )] = 1,33 / 0,96 = 1,39$$

# FUNÇÃO DE RESPOSTA QUANTO VARIÁVEL DEPENDENTE É BINÁRIA

– Vamos considerar o modelo de regressão linear simples:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

– A resposta esperada é dada por:

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

– Na regressão logística,  $Y_i$  possui uma distribuição de probabilidade:

$$Y_i = 1 \rightarrow P(Y_i = 1) = \pi_i$$

$$Y_i = 0 \rightarrow P(Y_i = 0) = 1 - \pi_i$$

# LOGITO

– O logito (*logit*) equivale ao logaritmo natural (base e) da chance:

$$\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \log(p) - \log(1-p)$$

– A função logística é dada pelo logito-inverso (anti-logit) que nos permite transformar o logito em probabilidade:

$$p = \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)}$$

## RAZÃO DE CHANCES (*ODDS RATIO*)

– Compara a chance de sucesso de um grupo em relação a outro grupo:

$$\log(R) = \log\left(\frac{p_1/(1-p_1)}{p_2/(1-p_2)}\right)$$

$$\log(R) = \log\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right) - \log\left(\frac{p_2}{1-p_2}\right)$$

$$\log(R) = \text{logit}(p_1) - \text{logit}(p_2)$$

– Portanto, a diferença entre os logitos de duas probabilidades equivale ao logaritmo da razão de chances.

## RAZÃO DE CHANCES (ODDS RATIO)

$$\frac{A}{B} = \frac{p_1/(1-p_1)}{p_2/(1-p_2)} = \frac{\exp(\beta_0 + \gamma)}{\exp(\beta_0)} = \frac{\exp(\beta_0) * \exp(\gamma)}{\exp(\beta_0)} = \exp(\gamma)$$

- Razão de chance é dada pela expressão  $\exp(\gamma)$ : chance de sucesso no grupo A, em relação ao grupo B.
- Se  $\exp(\gamma)$  for maior que uma unidade, chance de sucesso em A é maior que em B.
  - Ex.:  $\exp(\gamma)=1,17$ , chance de sucesso em A é 1,17 vezes maior do que em B, ou seja, é 17% maior do que em B.
- Se  $\exp(\gamma)$  for menor que uma unidade, chance de sucesso em A é menor que em B.
  - Ex.:  $\exp(\gamma)=0,61$ , chance de sucesso em A é 0,61 vezes a chance de B, ou seja, é 39% menor do que em B.



## DEFINIÇÃO DO VALOR ESPERADO

– Pela definição de valor esperado, obtemos:

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i = \pi_i$$

– Assim, a resposta média, quando a variável resposta é uma variável binária (1 ou 0), representa a probabilidade de  $Y = 1$ , para o nível da variável independente  $X_j$ .

## REGRESSÃO LOGÍSTICA COM UMA VARIÁVEL INDEPENDENTE

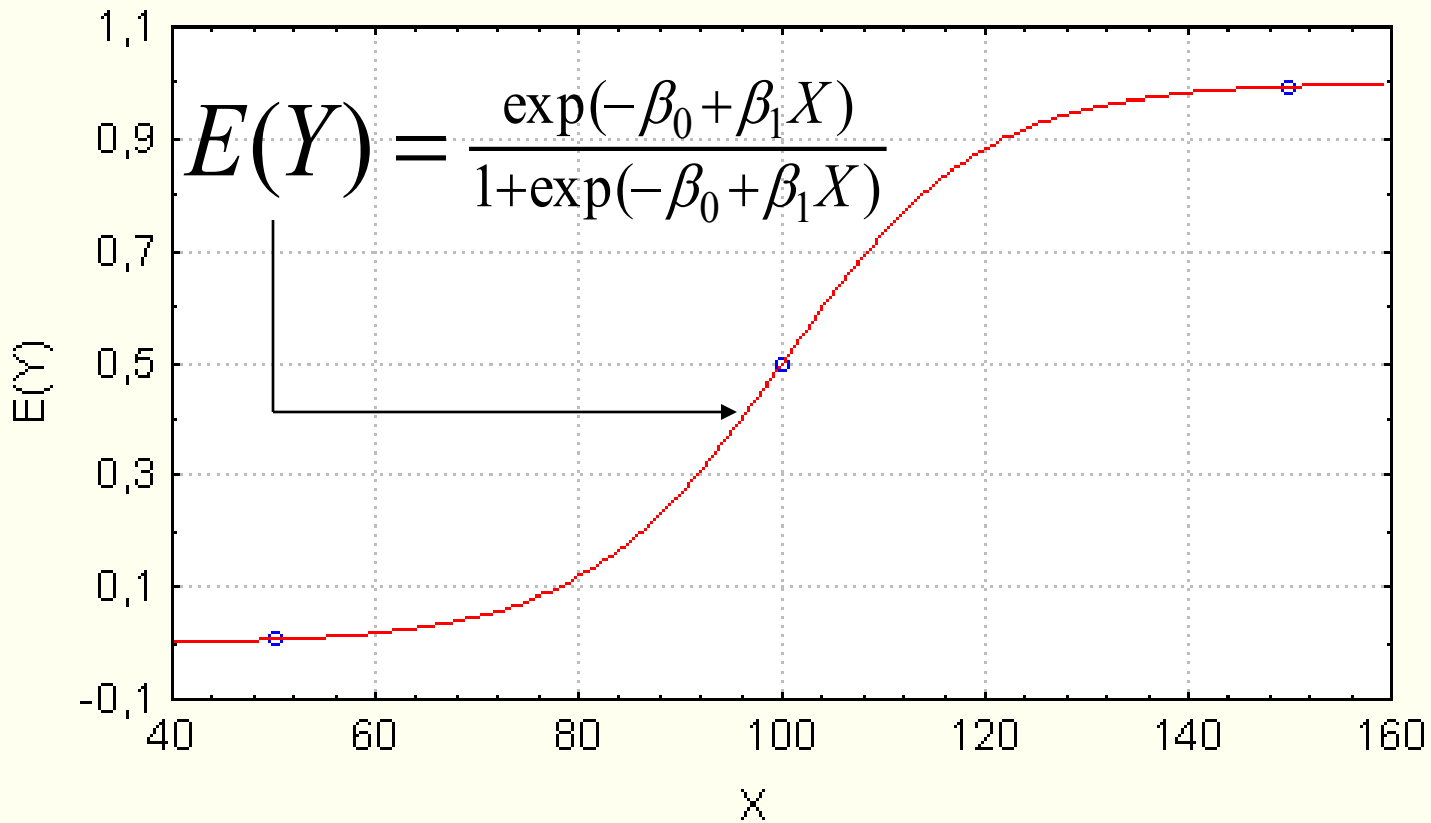
- Considerações teóricas e práticas sugerem que quando a variável resposta é binária, a forma da função resposta será frequentemente curvilínea.
- As funções respostas (valores preditos) das figuras são denominadas funções logísticas, cuja expressão é:

$$E(Y) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 X)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 X)}$$

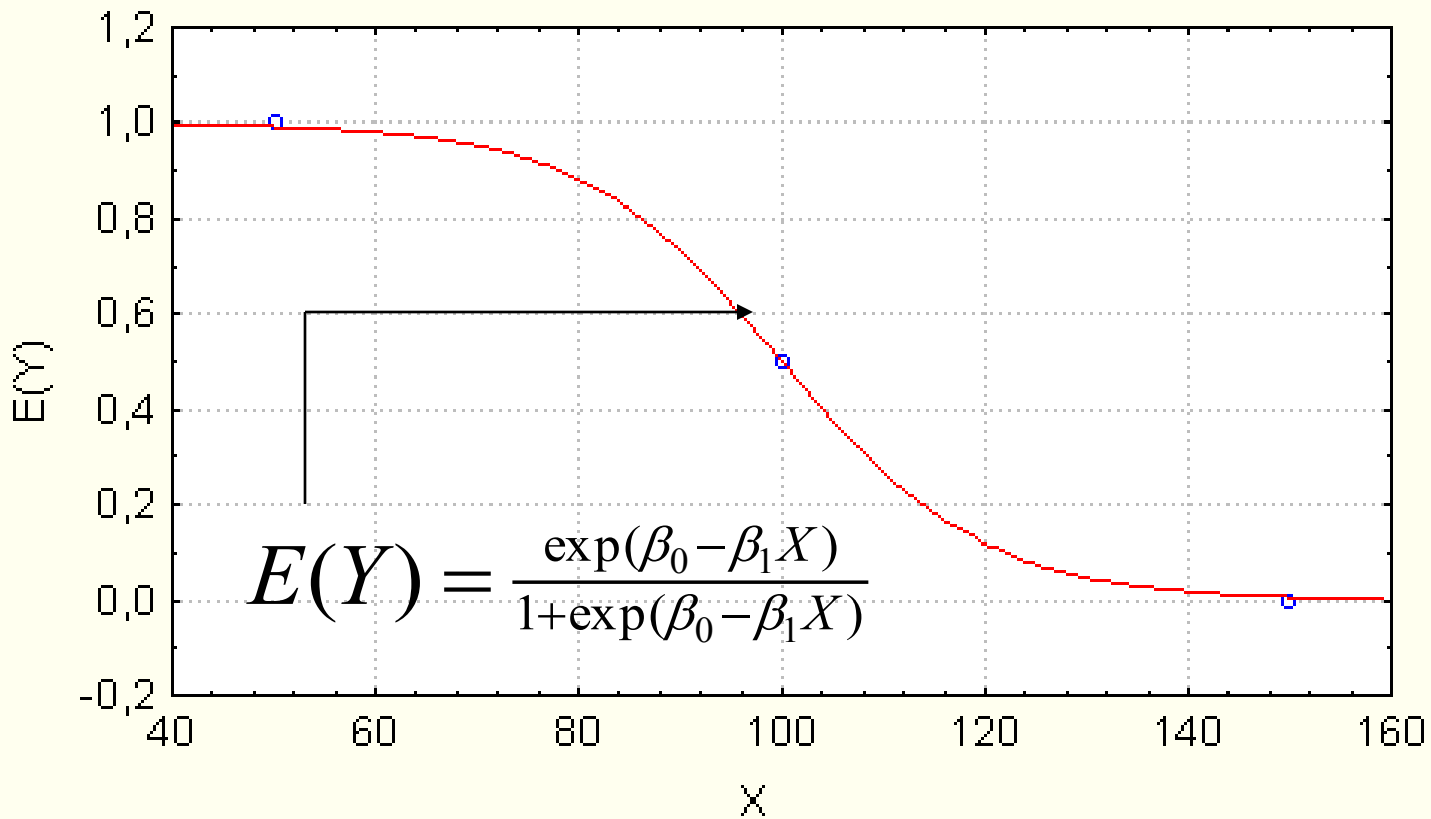
- Forma equivalente:

$$E(Y) = \left[ 1 + \exp(-\beta_0 - \beta_1 X) \right]^{-1}$$

# VARIÁVEL DEPENDENTE ESTIMADA PELA VARIÁVEL INDEPENDENTE OBSERVADA



# VARIÁVEL DEPENDENTE ESTIMADA PELA VARIÁVEL INDEPENDENTE OBSERVADA



# REGRESSÃO LOGÍSTICA COM MAIS DE UMA VARIÁVEL INDEPENDENTE

– Função com uma variável independente:

$$E(Y) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 X)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 X)}$$

– Função com uma série de variáveis independentes:

$$E(Y) = \frac{\exp(\boldsymbol{\beta}' \mathbf{X})}{1 + \exp(\boldsymbol{\beta}' \mathbf{X})}$$

– Uma forma equivalente é dada por:

$$E(Y) = (1 + \exp(-\boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}))^{-1}$$

## EQUAÇÃO DE REGRESSÃO

- A parte linear da equação da regressão logística é usada para encontrar a probabilidade de estar em uma categoria, baseado na combinação de variáveis independentes.

$$\bar{Y}_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3}}$$

- Os coeficientes de regressão e seus erros padrões são estimados com métodos de máxima verossimilhança.

## AJUSTANDO O MODELO

– A função log-verossimilhança estende-se diretamente para o modelo de regressão logística múltipla, dada por:

$$\log_e L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n Y_i (\boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}_i) - \sum_{i=1}^n \log_e (1 + \exp(\boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}_i))$$

– Métodos numéricos devem ser utilizados para encontrar os valores de  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$  para maximizar a expressão.

– As estimativas de máxima verossimilhança serão denotadas por  $b_0, b_1, \dots, b_{p-1}$ .

– A função resposta logística ajustada e os valores ajustados são dados por:

$$\hat{\pi} = \frac{\exp(\mathbf{b}' \mathbf{X})}{1 + \exp(\mathbf{b}' \mathbf{X})} = (1 + \exp(-\mathbf{b}' \mathbf{X}))^{-1}$$

$$\hat{\pi}_i = \frac{\exp(\mathbf{b}' \mathbf{X}_i)}{1 + \exp(\mathbf{b}' \mathbf{X}_i)} = (1 + \exp(-\mathbf{b}' \mathbf{X}_i))^{-1}$$

# ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

- Não existe uma solução analítica para os valores  $\beta_0$  e  $\beta_1$  que maximizam a função de verossimilhança.
- Métodos numéricos são necessários para encontrar as estimativas de máxima verossimilhança,  $b_0$  e  $b_1$ .
- Encontradas as estimativas  $b_0$  e  $b_1$ , substitui-se esses valores para encontrar os valores ajustados.
- O valor ajustado para o  $i$ -ésimo valor é dado por:

$$\hat{\pi}_i = \frac{\exp(b_0 + b_1 X_i)}{1 + \exp(b_0 + b_1 X_i)}$$

- Se usarmos a transformação *logit*, a função é:

$$\hat{\pi} = \frac{\exp(b_0 + b_1 X)}{1 + \exp(b_0 + b_1 X)}$$

- A função de resposta ajustada é dada por:

$$\hat{\pi}' = b_0 + b_1 X \quad \text{onde:} \quad \hat{\pi}' = \log_e \left( \frac{\hat{\pi}}{1 - \hat{\pi}} \right)$$



# TESTE DE QUI-QUADRADO DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Logaritmo da verossimilhança (*Log-likelihood*):

$$\log\text{-likelihood} = \sum_{i=1}^N [Y_i \ln(\hat{Y}_i) + (1 - Y_i) \ln(1 - \hat{Y}_i)]$$

- Modelos são comparados com uso dos logaritmos das verossimilhanças dos modelos:

$$X^2 = -2 [(\log\text{-likelihood do modelo restrito}) \\ - (\log\text{ likelihood do modelo irrestrito})]$$

ou

$$X^2 = 2 [(\log\text{-likelihood do modelo irrestrito}) \\ - (\log\text{ likelihood do modelo restrito})]$$

- Modelos precisam ser aninhados para comparação, ou seja, todas variáveis independentes do menor modelo (restrito) devem estar incluídas no maior modelo (irrestrito).

## MAIS TESTE DE QUI-QUADRADO

- O teste de qui-quadrado da razão da verossimilhança é igual ao ajuste do modelo restrito ( $-2 \cdot \log.$  da verossimilhança do modelo anterior) menos o ajuste do modelo irrestrito ( $-2 \cdot \log.$  da verossimilhança do modelo atual).
- O logaritmo da verossimilhança multiplicado por  $-2$  é usado para testar hipóteses entre modelos aninhados, sendo que seu valor não tem um significado específico.
- Esta razão é testada em uma distribuição de qui-quadrado, levando em consideração a diferença entre os graus de liberdade (número de variáveis independentes do modelo irrestrito menos o número de variáveis independentes do modelo restrito).
- Se o teste de qui-quadrado é significativo, é afirmado que o modelo irrestrito não pode ter redução de variáveis independentes, dado um nível de significância específico.

## TESTE DE WALD

- Cada coeficiente é avaliado usando o teste de Wald, que é simplesmente um teste de escore z:

$$W_j = \frac{\beta_j}{EP_{\beta_j}}$$

- Os testes dos coeficientes são aproximadamente escores z, os quais são posteriormente elevados ao quadrado, fazendo com que esta estatística tenha distribuição de qui-quadrado.
- Esse teste é usado para avaliar a significância de cada coeficiente ( $\beta$ ) no modelo.
- O teste de Wald é conhecido por ser conservador (aumenta o erro II).

## ERROS TIPO I E TIPO II

- Ao testar  $H_0$ , chegamos a uma conclusão de rejeitá-la ou de deixar de rejeitá-la.
- Tais conclusões pode estar corretas ou erradas.

		Estado verdadeiro da natureza	
		A hipótese nula é verdadeira	A hipótese nula é falsa
Decisão	Decidimos rejeitar a hipótese nula.	Erro tipo I (rejeitar uma hipótese nula verdadeira) $\alpha$	Decisão Correta
	Deixamos de rejeitar a hipótese nula	Decisão Correta	Erro tipo II (deixar de rejeitar uma hipótese nula falsa) $\beta$

- $\alpha$ : probabilidade de erro tipo I (probabilidade de rejeitar hipótese nula quando ela é verdadeira).
- $\beta$ : probabilidade de erro tipo II (probabilidade de deixar de rejeitar hipótese nula quando ela é falsa).

## PSEUDO R<sup>2</sup>

- Há várias medidas de associação que pretendem servir como um R<sup>2</sup> na regressão logística.
- Porém, nenhuma destas medidas é realmente o R<sup>2</sup>.
- A interpretação não é a mesma, mas eles podem ser vistos como uma aproximação da variação na variável dependente, devido à variação nas variáveis independentes.
- Para comparação de grau de ajuste entre modelos é mais apropriado fazer o teste de qui-quadrado da razão da verossimilhança.

# MODELO LOGÍSTICO MULTINOMIAL

- É possível estimar uma regressão logística em que a variável dependente tem mais de duas categorias.
- Ou seja, o modelo logístico pode ser estendido quando a variável resposta qualitativa tem mais do que duas categorias.
- Por exemplo, posicionamento ideológico: esquerda, centro, direita.
- São geradas  $k - 1$  equações, sendo  $k$  o número de categorias.
- As equações geram probabilidades para predizer se uma categoria está acima/abaixo da categoria de referência.

# EXEMPLO DE MODELO LOGÍSTICO

# IMPACTO DO BOLSA FAMÍLIA SOBRE ABANDONO ESCOLAR

- Banco de dados de Avaliação de Impacto do Programa Bolsa Família (AIBF) de 2005 do Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS).
- Modelos logísticos foram estimados para três grupos de domicílios, segundo limites máximos da renda domiciliar per capita:
  - 1) R\$50,00: população com piores condições sócio-econômicas.
  - 2) R\$100,00: limite oficial de renda definido para elegibilidade ao PBF.
  - 3) R\$200,00: garante representatividade amostral em todos grupos.



## VARIÁVEL DEPENDENTE

- Variável dependente indica se a criança abandonou a escola entre 2004 e 2005:
  - No ano passado, frequentava escola ou creche?
  - Frequenta escola ou creche atualmente?
- Foi realizada análise multivariada, controlando as estimativas por características do domicílio, mãe e criança.

## VARIÁVEIS INDEPENDENTES DE DOMICÍLIO

- Número de membros da família.
- Presença de idosos.
- Presença de rede geral de água.
- Iluminação elétrica.
- Serviço de coleta de lixo.
- Domicílio em zona urbana ou rural.
- Região de residência (Sul/Sudeste; Norte/Centro-Oeste; Nordeste).

## VARIÁVEIS INDEPENDENTES DA MÃE

- Indicação se mãe é chefe do domicílio.
- Cor/raça.
- Anos de escolaridade.
- Idade.
- Residia há menos de 10 anos no município.
- Participação em organizações sociais.
- Horas de trabalho por semana.
- Tempo gasto em cuidados com a casa por dia.

## DEMAIS VARIÁVEIS INDEPENDENTES

### **Variáveis independentes da criança:**

- Idade da criança.
- Indicação se criança trabalha.
- Mãe reside no domicílio.

### **Beneficiário do Programa Bolsa Família:**

- Indicação se criança reside em domicílio que recebe o benefício.

## DESCRIÇÃO DA AMOSTRA

- Distribuição percentual de crianças por grupos de renda domiciliar per capita e recebimento do benefício.

<b>Programa Bolsa Família</b>	<b>Limite de renda domiciliar per capita</b>		
	<b>R\$50,00</b>	<b>R\$100,00</b>	<b>R\$200,00</b>
Sim	68,39%	64,71%	59,75%
Não	31,61%	35,29%	40,25%
Nº casos (n)	3.312	6.761	9.232

Fonte: AIBF/MDS (2005).

## DISTRIBUIÇÃO DA VARIÁVEL DEPENDENTE

- Percentual de crianças que abandonaram a escola entre 2004 e 2005 por grupo de renda e recebimento do benefício.

<b>Programa Bolsa Família</b>	<b>Limite de renda domiciliar per capita</b>		
	<b>R\$50,00</b>	<b>R\$100,00</b>	<b>R\$200,00</b>
Sim	1,10%	1,42%	1,30%
Não	2,39%	1,97%	1,80%
Diferença	1,28%***	0,55%***	0,50***

\*\*\*Significativo ao nível de confiança de 99%.

Fonte: AIBF/MDS (2005).

## RAZÕES DE CHANCES DA CRIANÇA TER ABANDONADO A ESCOLA ENTRE 2004 E 2005

Variáveis independentes	R\$50,00	R\$100,00	R\$200,00
<b>Variáveis de domicílio</b>			
Nº de membros da família	1,122	1,124***	1,108***
Idosos no domicílio	1,454	1,678	1,331
Rede de água	1,066	0,767	0,694*
Iluminação elétrica	1,270	1,106	1,293
Coleta de lixo	0,994	0,756	0,621**
Rural	ref.	ref.	ref.
Urbano	1,729	1,910*	2,309***
Sul/Sudeste	ref.	ref.	ref.
Norte/Centro-Oeste	2,536**	1,889**	1,630**
Nordeste	3,035**	2,248***	2,064***

## RAZÕES DE CHANCES DA CRIANÇA TER ABANDONADO A ESCOLA ENTRE 2004 E 2005 (cont.)

Variáveis independentes	R\$50,00	R\$100,00	R\$200,00
<b>Variáveis da mãe</b>			
Mãe é chefe do domicílio	1,974***	1,445*	1,508**
Preta/Parda	ref.	ref.	ref.
Branca	2,248**	2,029***	1,465**
0 anos de estudo	ref.	ref.	ref.
1-4 anos de estudo	1,267	1,195	1,135
5-8 anos de estudo	0,701	0,898	0,902
9+ anos de estudo	0,251*	0,440*	0,481*
0-24 anos	1,507	4,757***	4,534***
25-34 anos	ref.	ref.	ref.
35-49 anos	1,170	1,111	1,109
50+ anos	0,053***	0,532	0,645



## RAZÕES DE CHANCES DA CRIANÇA TER ABANDONADO A ESCOLA ENTRE 2004 E 2005 (cont.)

Variáveis independentes	R\$50,00	R\$100,00	R\$200,00
<b>Variáveis da mãe</b>			
<10 anos no município	1,325	1,411	1,838***
Participa org. social	0,731	0,643*	0,565***
0 hora/semana trabalho	ref.	ref.	ref.
1-20 horas/semana trabalho	0,257*	0,920	1,177
21-39 horas/semana trabalho	0,736	0,744	0,907
40+ horas/semana trabalho	0,904	1,790**	1,529*
<b>Variáveis da criança</b>			
0-2 hora/dia trab. casa	ref.	ref.	ref.
3-4 hora/dia trab. casa	2,975	1,089	0,854
5-6 hora/dia trab. casa	2,399	1,241	1,050
7+ hora/dia trab. casa	2,084	1,563	1,443

## RAZÕES DE CHANCES DA CRIANÇA TER ABANDONADO A ESCOLA ENTRE 2004 E 2005 (cont.)

Variáveis independentes	R\$50,00	R\$100,00	R\$200,00
<b>Variáveis da criança</b>			
Idade	1,174**	1,226***	1,194***
Criança trabalha	1,417	1,177	1,465
Mãe reside no domicílio	0,218***	0,455**	0,610*
<b>Beneficiário do Programa Bolsa Família</b>	<b>0,428***</b>	<b>0,662**</b>	<b>0,666**</b>
Número de casos (crianças)	3.312	6.761	9.232

\*Significativo ao nível de 90%; \*\*Significativo ao nível de 95%; \*\*\*Significativo ao nível de 99%.  
Fonte: AIBF/MDS (2005).