AULA 06
Probabilidade

Ernesto F. L. Amaral

03 de setembro de 2013
Metodologia de Pesquisa (DCP 854B)

Fonte:

Triola, Mario F. 2008. “Introdução à estatística”. 10 ª ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 4 (pp.110-157).

ESTRUTURA DA AULA

– Fundamentos

– Regra da adição

– Regra da multiplicação: idéias básicas

– Regra da multiplicação: complementares e probabilidade condicional

– Probabilidades através de simulações

– Contagem

PROBABILIDADE

– A probabilidade é a base sobre a qual são construídos importantes métodos de inferência estatística.

– Regra do evento raro para inferência estatística: se, sob uma dada hipótese, a probabilidade de um evento particular observado for muito pequena, concluímos que, provavelmente, a hipótese não é correta.

– Objetivo principal é de entender valores de probabilidade, os quais serão úteis nos capítulos seguintes.

– Também aprenderemos como determinar valores de probabilidades em uma variedade de circunstâncias.

FUNDAMENTOS

DEFINIÇÕES

– Os valores de probabilidade se expressam como números entre 0 e 1 (inclusive).

– O importante é aprender a interpretar valores de probabilidade.

– Uma probabilidade muito pequena (0,001, por exemplo) indica que determinado evento raramente ocorre.

– Um **evento** é qualquer conjunto de resultados ou consequências de um experimento.

– Um **evento simples** é um resultado ou um evento que não pode mais ser decomposto em componentes mais simples.

– O **espaço amostral** de um experimento consiste em todos os eventos simples possíveis, ou seja, são todos resultados que não podem mais ser decompostos.

EXEMPLOS

Procedimento	Exemplo de evento	Espaço amostral
1 nascimento	**Evento simples:** sexo feminino	Com 1 nascimento, há 2 resultados que são eventos simples: {f, m}
3 nascimentos	**Evento:** 2 femininos e 1 masculino **Eventos simples** (todos eventos simples resultantes de 2 femininos e 1 masculino): ffm, fmf, mff	Com 3 nascimentos, há 8 resultados que são eventos simples: {fff, ffm, fmf, fmm, mff, mfm, mmf, mmm}

NOTAÇÃO BÁSICA PARA PROBABILIDADE

– ***P*** representa a probabilidade.

– ***A***, ***B*** e ***C*** representam eventos específicos.

– ***P(A)*** representa a probabilidade de ocorrência do evento ***A***.

REGRAS PARA DEFINIR PROBABILIDADE DE EVENTO

– Há diferentes formas de definir a probabilidade de um evento, tais como:

REGRA 1

Aproximação da probabilidade pela frequência relativa:

P(A) = (nº vezes em que ocorreu A) /

(nº vezes que procedimento foi repetido)

– **Lei dos grandes números:** à medida que um experimento é repetido várias vezes (maior amostra), essa probabilidade tende a se aproximar da verdadeira probabilidade.

– Exemplo é a probabilidade de ocorrências de cara, ao lançar uma moeda.

REGRA 2

Abordagem clássica da probabilidade:

– Determinado experimento tem *n* diferentes eventos simples e cada um desses eventos simples tem igual chance de ocorrer (resultados igualmente prováveis).

– Se evento *A* pode ocorrer em *s* dessas *n* maneiras, então:

P(A) = (nº maneiras em que A pode ocorrer) / (nº diferentes eventos simples) = s / n

– Exemplo é o número de maneiras em que 4 pode ocorrer ao lançar dois dados.

REGRA 3

Probabilidades subjetivas:

– P(A) é estimada com base no conhecimento de circunstâncias relevantes.

– Exemplo é a previsão meteorológica para o dia seguinte.

CONSIDERAÇÕES IMPORTANTES

– Um **erro comum** consiste em, incorretamente, admitir que os resultados são igualmente prováveis porque não sabemos coisa alguma sobre a probabilidade de cada resultado.

– Quando não se sabe coisa alguma a respeito da probabilidade de diferentes resultados possíveis, **não se deve supor** que sejam igualmente prováveis.

– Nos problemas de probabilidade básica, é muito importante **examinar a informação disponível** cuidadosamente e identificar o número total de resultados possíveis.

– A **precisão dos resultados** depende da qualidade do método de amostragem e dos procedimentos de pesquisa.

– **Simulação** do experimento é um processo que se comporta da mesma maneira que o experimento, com resultados semelhantes e mais fáceis de calcular.

VALORES POSSÍVEIS DE PROBABILIDADE

- A probabilidade matemática de qualquer evento é 0, 1 ou um número entre 0 e 1:
  - A probabilidade de um evento impossível é 0.
  - A probabilidade de um evento cuja ocorrência é certa é 1.
  - Para qualquer evento A, a probabilidade de A está entre 0 e 1, inclusive (0 <= P(A) <= 1).

- Expressões mais familiares e comuns de verossimilhança:
  - Impossível: P(A)=0
  - Improvável: P(A)~=0,25
  - Chance 50-50: P(A)=0,5
  - Provável: P(A)~=0,75
  - Certo: P(A)=1

EVENTOS COMPLEMENTARES

– O complementar de um evento A, representado por $\bar{A}$, consiste em todos os resultados em que A não ocorre.

VALORES *P*

– Mais adiante, veremos a expressão “valor P” com “significância inferior a 0,001” (p<0,001 ou significante a 99,9%).

– O importante é saber que uma probabilidade de 0,001 corresponde a um evento tão raro que ocorre, em média, apenas uma vez em cada mil tentativas.

ARREDONDAMENTO DE PROBABILIDADES

– Ao expressar o valor de uma probabilidade, deve-se indicar:

1) A fração exata, por exemplo, 1/3.

2) O decimal exato, por exemplo, 0,5 (e não 0,500).

3) Arredondar o resultado final para três algarismos significativos, sendo que todos algarismos são significativos, menos os zeros que são incluídos para o posicionamento correto da vírgula decimal (por exemplo, 0,0215, ao invés de 0,021491).

– Quando uma probabilidade não é uma fração simples (432/7842, por exemplo), devemos expressá-la na forma decimal (0,0551) para facilitar compreensão.

CHANCES

– As expressões de verossimilhança (probabilidade) são frequentemente dadas em forma de chances, ex.: “50:1”.

– Uma desvantagem séria das chances é que elas tornam muitos cálculos extremamente difíceis.

– A **chance real contra** a ocorrência do evento *A* é dada pela razão $P(\bar{A})/P(A)$, usualmente expressa na forma *a:b* (ou “*a* para *b*”), onde *a* e *b* são inteiros primos entre si.

– A **chance real a favor** do evento *A* é o inverso da chance real contra aquele evento. Se a chance contra *A* é *a:b*, então a chance a favor de *A* é *b:a* ou $P(A)/P(\bar{A})$.

– A **chance no rateio** contra o evento *A* representa a razão do lucro líquido (se você ganhar) para a quantia apostada:

(lucro líquido) : (quantia apostada)

EXEMPLO

– Digamos: (1) você aposta 5 dólares no número 13 em uma roleta; (2) sua probabilidade de ganhar é de 1/38; e (3) a chance no rateio dada pelo cassino é de 35:1.

– **Chance real contra 13**

  – P(13)=1/38 e P(não 13)=37/38

  – P(não 13)/P(13) = (37/38)/(1/38) = 37/1 = 37:1

– **Lucro líquido**

  – 35:1 = (lucro líquido):(quantia apostada)

  – Lucro líquido é de $35 para cada dólar apostado.

  – Se aposta é de $5, apostador recebe $180 [(5*35)+5].

– **Chance no rateio = chance real contra 13**

  – Lucro líquido seria de $37 para cada dólar apostado.

  – Cassino está lucrando $2 para cada dólar apostado.

REGRA DA ADIÇÃO

REGRA DA ADIÇÃO (ou)

– A regra da adição é uma ferramenta para achar probabilidades que podem ser expressas como $P(A \text{ ou } B)$:

  – A probabilidade de que ocorra: (1) o evento *A*; (2) o evento *B*; ou (3) ambos ocorram.

– Precisamos encontrar o número total de maneiras que o evento *A* pode ocorrer e que o evento *B* pode ocorrer, mas sem contar qualquer resultado mais de uma vez.

– Usaremos mais o **"ou inclusivo"** (ou um, ou outro, ou ambos), ao invés do **"ou exclusivo"** (ou um, ou outro, mas não ambos).

– É importante saber que **evento composto** é qualquer evento que combina dois ou mais eventos simples.

$$P(A \text{ ou } B)=P(\text{evento } A, \text{ ou } B, \text{ ou ambos em única prova})$$

EXEMPLO

Resultado do teste	Sujeito realmente usou maconha?	
	Sim	Não
Positivo	119 (positivo verdadeiro)	24 (falso positivo)
Negativo	3 (falso negativo)	154 (negativo verdadeiro)

– **Qual a probabilidade de ser selecionado um sujeito que teve teste positivo ou usava maconha?**

– Somente positivo (24), somente maconha (3), ambos (119).

– P(teste positivo ou usava maconha) = 146 / 300 = 0,487.

– Tomou-se o cuidado de não realizar contagens duplas.

REGRA FORMAL E REGRA INTUITIVA

– **Regra formal da adição:**

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

– *P(A e B)* representa a probabilidade de *A* e *B* ocorrerem em conjunto, como resultado de 1 prova do experimento.

– **Regra intuitiva da adição:**

– Para achar *P(A ou B)*, ache a soma do número de maneiras segundo as quais o evento *A* pode ocorrer e o número de maneiras segundo as quais o evento *B* pode ocorrer, somando de tal maneira que cada resultado seja contado apenas uma vez.

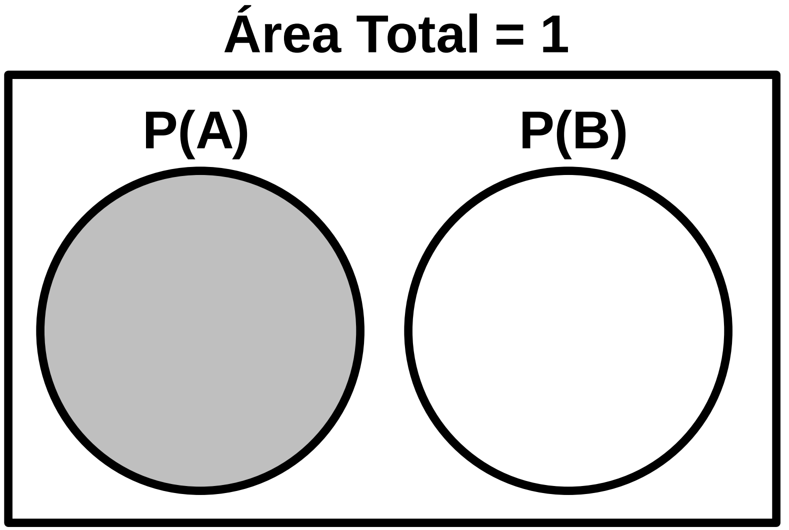
– *P(A ou B)* é igual a esta soma dividida pelo número total de resultados do espaço amostral.

DIAGRAMA DE VENN

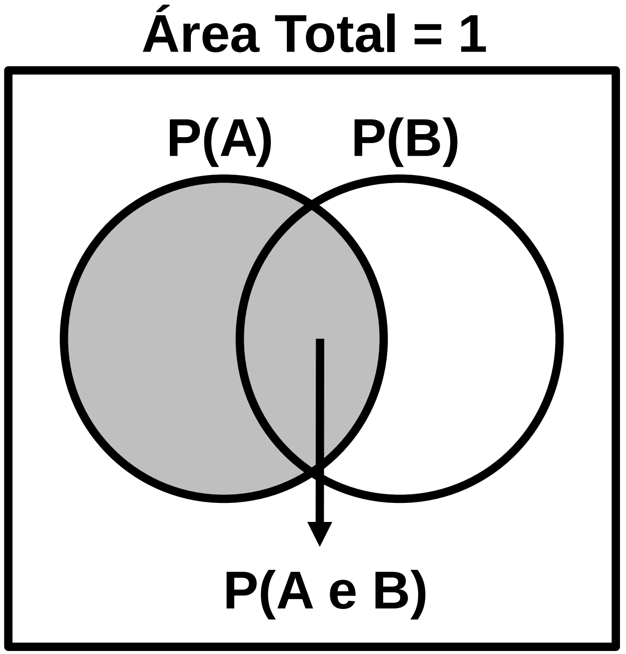
– Eventos *A* e *B* são disjuntos (ou mutuamente exclusivos) se eles não podem ocorrer simultaneamente.

– Ou seja, eventos disjuntos não se superpõem.

EVENTOS DISJUNTOS



EVENTOS NÃO-DISJUNTOS



P(A e B): probabilidade de que *A* e *B* ocorram ambos na mesma prova do experimento.

EVENTOS COMPLEMENTARES

– O evento *A* e seu complementar ($\bar{A}$) têm que ser disjuntos, porque é impossível um evento e seu complementar ocorrerem ao mesmo tempo.

– Podemos afirmar que *A* ocorre ou não ocorre, o que implica que ou *A* ou $\bar{A}$ tem que ocorrer.

– Regra da adição para eventos disjuntos:

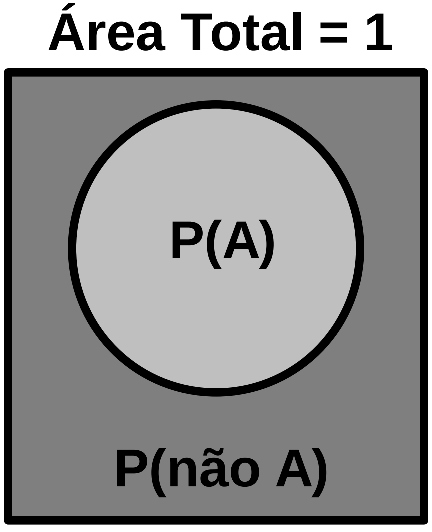
$$P(A\ ou\ \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

– Três expressões equivalentes:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$



REGRA DA MULTIPLICAÇÃO:
IDÉIAS BÁSICAS

REGRA DA MULTIPLICAÇÃO (e): IDÉIAS BÁSICAS

– A regra básica da multiplicação é usada para se encontrar *P*(*A* e *B*), a probabilidade de o evento *A* acontecer em uma primeira prova e o evento *B* ocorrer em uma segunda prova.

– Se o resultado do primeiro evento *A* afeta a probabilidade do segundo evento *B*, é importante ajustar a probabilidade de *B* para refletir a ocorrência do evento *A*.

– **Probabilidade condicional:** *P*(*B*|*A*) representa a probabilidade do evento *B* ocorrer depois que se admite que o evento *A* ocorreu.

EXEMPLO

Resultado do teste	Sujeito realmente usou maconha?	
	Sim	Não
Positivo	119 (positivo verdadeiro)	24 (falso positivo)
Negativo	3 (falso negativo)	154 (negativo verdadeiro)

– **Qual a probabilidade de que a primeira pessoa selecionada tenha um resultado de teste positivo e a segunda pessoa tenha um teste negativo?**

1) *P*(teste positivo) = 143/300.

2) *P*(teste negativo) = 157/299.

– P(1º positivo e 2º negativo) = (143/300) x (157/299) = 0,250.

DEFINIÇÕES IMPORTANTES

– Dois eventos *A* e *B* são **independentes** se a ocorrência de um não afeta ocorrência do outro (com reposição):

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \text{ x } P(B)$$

– Se a ocorrência de *B* depende da ocorrência de *A*, estes eventos são **dependentes** (sem reposição):

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \text{ x } P(B|A)$$

– **Regra intuitiva da multiplicação:**

  – Ao calcular a probabilidade de ocorrência do evento *A* em uma prova e do evento *B* na prova seguinte:

    – Multiplique a probabilidade do evento *A* pela probabilidade do evento *B*.

    – Mas certifique-se de que a probabilidade do evento *B* leva em conta a ocorrência prévia do evento *A*.

VÁRIOS EVENTOS

– A probabilidade de qualquer sequência de eventos independentes é o produto das probabilidades correspondentes.

– Podemos também estender a regra da multiplicação de modo que ela se aplique a eventos dependentes, ajustando as probabilidades à medida que avançamos.

EVENTOS DEPENDENTES COMO INDEPENDENTES

– É prática comum considerarem-se os eventos como independentes quando pequenas amostras são retiradas de grandes populações:

  – É raro selecionar o mesmo item duas vezes.

– Se o tamanho da amostra não é maior que 5% do tamanho da população, trate as seleções como sendo independentes:

  – Isso é realizado mesmo que as seleções sejam feitas sem reposição, ou seja, sejam tecnicamente dependentes.

– Isso é usado em pesquisas de opinião pública, quando há poucas entrevistas em uma população de milhões:

  – Mesmo sem reposição, é considerada independência.

REGRA DA MULTIPLICAÇÃO:
COMPLEMENTARES E PROBABILIDADE CONDICIONAL

REGRA DA MULTIPLICAÇÃO: COMPLEMENTARES E PROBABILIDADE CONDICIONAL

- **Probabilidade complementar:**
  - Quando desejamos achar a probabilidade de que, entre várias tentativas, obtemos pelo menos um de alguns eventos especificados:
    - Podemos achar a probabilidade de que nenhum daqueles eventos ocorrerá.
    - Então achamos a probabilidade complementar.

- **Probabilidade condicional:**
  - É a probabilidade de um evento, dada a informação adicional de que algum outro evento já ocorreu.

COMPLEMENTARES:
PROBABILIDADE DE "PELO MENOS UM"

– A regra da multiplicação e a regra do complementar podem ser usadas em conjunto para resolver certos problemas.

– Ache a probabilidade de que, entre várias tentativas, **pelo menos um** (um ou mais) forneça um resultado especificado.

– O complementar de se obter pelo menos um de um item particular é não se obter qualquer item daquele tipo.

– Probabilidade de pelo menos um de alguma coisa é a diferença entre 1 e a probabilidade de nenhum:

$$P(\text{pelo menos um}) = 1 - P(\text{nenhum})$$

EXEMPLO: SEXO DE CRIANÇAS

– Sendo meninos e meninas igualmente prováveis e sexo de uma criança independente do sexo de outra, qual é a probabilidade de pelo menos 1 menina em 3 crianças?

1) P(A) = pelo menos 1 menina em 3 crianças

2.1) P(não A) = não se obter pelo menos 1 menina em 3

2.2) P(não A) = todas 3 crianças são meninos

2.3) P(não A) = menino e menino e menino

3.1) Probabilidade complementar = P(não A)

3.2) P(menino, menino, menino) = 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/8

4) P(A) = 1 – P(não A) = 1 – 1/8 = 7/8

PROBABILIDADE CONDICIONAL

– A probabilidade condicional de um evento é usada quando a probabilidade é afetada pelo conhecimento de outras circunstâncias.

– Ou seja, é a probabilidade obtida com a informação adicional de que algum outro evento já ocorreu.

– $P(B|A)$ representa a probabilidade condicional da ocorrência do evento *B*, dado que o evento *A* já ocorreu:

  – Como: $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A)$

  – Temos: $P(B|A) = P(A \text{ e } B) / P(A)$

– **Abordagem intuitiva:** a probabilidade condicional de *B* dado *A* pode ser calculada considerando-se que o evento *A* ocorreu e calcular a probabilidade de que o evento *B* ocorrerá.

EXEMPLO

Resultado do teste	Sujeito realmente usou maconha?	
	Sim	Não
Positivo	119 (positivo verdadeiro)	24 (falso positivo)
Negativo	3 (falso negativo)	154 (negativo verdadeiro)

– **Ao escolher 1 pessoa, qual a probabilidade do teste ser positivo, visto que esta pessoa usou maconha?**

1) P(positivo|maconha) = 119/122 = 0,975.

= P(positivo e maconha)/P(maconha) = (119/300) / (122/300)

2) P(maconha|positivo) = 119/143 = 0,832

= P(maconha e positivo)/P(positivo) = (119/300) / (143/300)

PROBABILIDADES ATRAVÉS DE SIMULAÇÕES

PROBABILIDADES ATRAVÉS DE SIMULAÇÕES

– Ao invés de usarmos regras formais para encontrar probabilidades, podemos desenvolver uma simulação, a qual se comporta da mesma maneira que o procedimento em análise.

– Uma **simulação** de um experimento é um processo que tem o mesmo comportamento do experimento, de modo que são gerados resultados semelhantes.

– É extremamente importante que a elaboração de uma simulação seja feita de modo que ela se comporte exatamente igual ao experimento real.

– Isso pode ser feito com tabela de números aleatórios ou com programas estatísticos:

  – P(data de nascimento igual: 1 a 365) com n=25 no Excel.

CONTAGEM

CONTAGEM

– Em muitos problemas de probabilidade, a maior dificuldade é encontrar o número total de resultados.

– Há diferentes métodos para se encontrar tais números.

– **Princípio fundamental da contagem:** para uma sequência de dois eventos, na qual o primeiro evento pode ocorrer de *m* maneiras e o segundo pode ocorrer de *n* maneiras, os eventos juntos podem ocorrer em um total de *m*n* maneiras.

– Exemplo:

  – Probabilidade de gerar um número aleatório de CPF.

  – 11 dígitos, sendo que cada um tem 10 resultados possíveis (0 a 9).

  – 10*10*10*10*10*10*10*10*10*10*10 = 100.000.000.000

  – P(nº aleatório CPF) = 1/100.000.000.000

REGRA DO FATORIAL

– O símbolo fatorial (!) representa o produto de inteiros positivos decrescentes (4! = 4*3*2*1 = 24).

  – Por definição, 0! = 1.

– Um conjunto de *n* diferentes itens pode ser organizado em ordem de *n*! maneiras diferentes.

  – Isso ocorre porque o primeiro item pode ser selecionado de *n* diferentes maneiras, o segundo de *n*–1 maneiras...

– Exemplo:

  – Se temos que realizar pesquisas nas capitais estaduais, qual o número de diferentes rotas possíveis?

  – 27! = 27*26*25*24*23*...*3*2*1

  – 10.888.869.450.418.400.000.000.000.000 rotas possíveis

REGRA DAS PERMUTAÇÕES (QUANDO TODOS ITENS SÃO DIFERENTES)

– Na permutação (arranjo, sequência), a ordem é levada em conta, no sentido de que diferentes ordenações dos mesmos itens são contadas separadamente.

– Requisitos:

  – Há um total de *n* diferentes itens disponíveis.

  – Selecionamos *r* dos *n* itens (sem reposição).

  – Temos que considerar reorganizações dos mesmos itens como sendo sequências diferentes (ABC≠ACB≠CBA...).

– Número de **permutações** (ou sequências) de *r* itens selecionados (sem reposição) dentre os *n* diferentes itens disponíveis é:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

EXEMPLO DE PERMUTAÇÃO (QUANDO TODOS ITENS SÃO DIFERENTES)

– Se temos que realizar pesquisas nas capitais estaduais, mas dispomos de tempo para visitar apenas quatro capitais, qual o número de diferentes rotas possíveis?

– Sendo n=27 e r=4, aplicamos a fórmula:

- – n! / (n–r)! =
- – 27! / (27–4)! =
- – 27! / 23! =
- – 27 * 26 * 25 * 24 * 23! / 23! =
- – 27 * 26 * 25 * 24 =
- – 421.200 rotas possíveis

REGRA DAS PERMUTAÇÕES (QUANDO ALGUNS ITENS SÃO IGUAIS A OUTROS)

– Requisitos:

– Há *n* itens disponíveis e alguns itens são iguais a outros.

– Selecionamos todos os *n* itens (sem reposição).

– Consideramos os rearranjos de itens distintos como sequências diferentes.

– Se os requisitos são satisfeitos e se há n_1 iguais entre si, n_2 iguais entre si, ..., n_k iguais entre si, o número de **permutações** (ou sequências) de todos os *n* itens selecionados sem reposição é: $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,...\,n_k!}$

– Quando há apenas duas categorias, podemos definir que *x* sejam iguais entre si e os outros *n*–*x* também: $\dfrac{n!}{(n-x)!\,x!}$

EXEMPLO DE PERMUTAÇÃO (QUANDO ALGUNS ITENS SÃO IGUAIS A OUTROS)

– Um pesquisador realiza um teste de um método de seleção de sexo com 10 casais. Os resultados dos nascimentos são de 8 meninas e 2 meninos.

– Quantas maneiras diferentes 8 meninas e 2 meninos podem ser arranjados em sequência?

  – Temos n=10 nascimentos.
  – n_1 iguais (meninas) = 8
  – n_2 iguais (meninos) = 2
  – $n! / (n_1!\ n_2!) = 10! / (8!\ 2!) = 10*9*8! / (8!\ 2!) = 10*9 / 2 = 45$
  – $n! / [(n–x)!x!] = 10! / [(10–8)!\ 8!] = 10! / (2!\ 8!) = 45$
  – Há 45 maneiras diferentes em que 8 meninas e 2 meninos podem ser arranjados.

PERMUTAÇÃO ≠ COMBINAÇÃO

– Quando diferentes ordenações dos mesmos itens são contadas separadamente, tem-se um problema de **permutação**:

  – Consideramos reorganizações dos mesmos itens como sendo sequências diferentes (ABC≠ACB≠CBA...).

– Quando as diferentes ordenações dos mesmos itens não são contadas separadamente, tem-se um problema de **combinação**:

  – Consideramos reorganizações dos mesmos itens como sendo sequências iguais (ABC=ACB=CBA...).

REGRA DAS COMBINAÇÕES

– Requisitos:

– Há *n* diferentes itens disponíveis.

– Selecionamos *r* dos *n* itens (sem reposição).

– Consideramos reorganizações dos mesmos itens como sendo a mesma (ABC=ACB=CBA...).

– Se os requisitos precedentes forem satisfeitos, o número de **combinações** de *r* itens escolhidos dentre *n* itens diferentes é:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

EXEMPLO

– Desejamos tratar 8 pessoas sadias (r) com uma nova droga e temos 10 voluntários (n).

– **8 sujeitos são selecionados dentre 10 e tratados em sequência. Se houver reação adversa, teste é interrompido. Quantos arranjos possíveis?**

Ordem importa (rearranjos de mesmos itens são diferentes):

permutação: $n!/(n-r)! = 10!/(10-8)! = 10!/2! = 1.814.400$

– **8 sujeitos são selecionados dentre 10 e tratados ao mesmo tempo. Quantos arranjos possíveis?**

Ordem não importa (rearranjos de mesmos itens são iguais):

combinação: $n!/(n-r)!r! = 10!/(10-8)!8! = 10!/2!8! = 45$