

# **AULA 05**

# **Teste de Hipótese**

**Ernesto F. L. Amaral**

**03 de setembro de 2012**

**Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas (FAFICH)**  
**Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)**

**Fonte:**

**Triola, Mario F. 2008. “Introdução à estatística”. 10<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 8 (pp.304-359).**

# ESQUEMA DA AULA

- Fundamentos do teste de hipótese.
- Teste de uma afirmativa sobre uma proporção.
- Teste de uma afirmativa sobre uma média:  $\sigma$  conhecido.
- Teste de uma afirmativa sobre uma média:  $\sigma$  desconhecido.
- Teste de uma afirmativa sobre um desvio padrão ou uma variância.

# FUNDAMENTOS DO TESTE DE HIPÓTESE

# HIPÓTESE

- **Inferência estatística** usa dados amostrais para duas atividades principais:
  - Estimar parâmetro populacional.
  - Testar hipótese ou afirmativa sobre parâmetro populacional.
  
- Em estatística, **hipótese** é uma afirmativa sobre uma propriedade da população.
  
- **Teste de hipótese** (teste de significância) é um procedimento padrão para se testar uma afirmativa sobre uma propriedade da população.

## REGRA DO EVENTO RARO

- Métodos de teste de hipótese se baseiam na **regra do evento raro** em inferência estatística.
- Se, sob uma dada suposição, a probabilidade de um evento observado particular é excepcionalmente pequena, concluimos que a suposição provavelmente não é correta.
- Testamos uma afirmativa analisando dados amostrais na tentativa de distinguir entre resultados que podem facilmente ocorrer por acaso e resultados que são altamente improváveis de ocorrer por acaso.

# FUNDAMENTOS DO TESTE DE HIPÓTESE

- É importante entender os **componentes individuais** de um teste de hipótese.
- **Conceitos básicos:** hipótese nula, hipótese alternativa, estatística de teste, região crítica, nível de significância, valor crítico, valor  $P$ , erro tipo I e erro tipo II.
- **Além do básico:** poder de um teste.

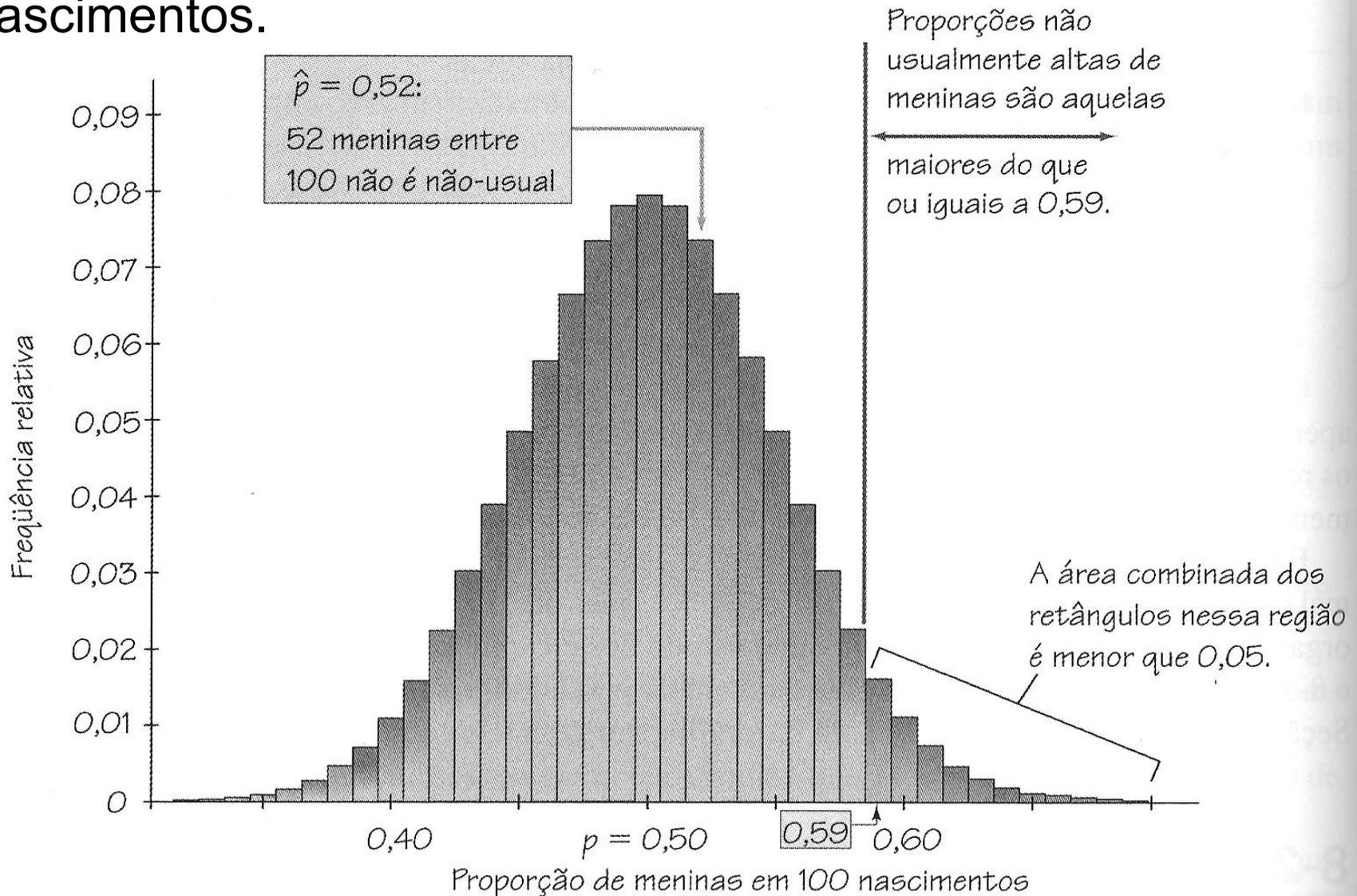
# CONCEITOS BÁSICOS DE TESTES DE HIPÓTESES

## – Objetivos:

- Dada uma afirmativa, identificar a hipótese nula e a hipótese alternativa e expressar ambas em forma simbólica.
- Dada uma afirmativa e dados amostrais, calcular o valor da estatística de teste.
- Dado um nível de significância, identificar os valores críticos.
- Dado um valor da estatística de teste, identificar o valor  $P$ .
- Estabelecer a conclusão de um teste de hipótese em termos simples, não-técnicos.

# EXEMPLO

- Distribuição amostral das proporções de meninas em 100 nascimentos.



# COMPONENTES DE UM TESTE DE HIPÓTESE FORMAL

- **Hipótese nula ( $H_0$ )** é uma afirmativa de que o valor de um parâmetro populacional (proporção, média ou desvio padrão) é igual a algum valor especificado.
  - Testamos a hipótese, supondo que ela seja verdadeira e chegamos à conclusão para rejeitar ou não rejeitar  $H_0$ .
  - Por exemplo:  $H_0: p=0,5$ ; ou  $H_0: \mu=98,6$ ; ou  $H_0: \sigma=15$ .
  
- **Hipótese alternativa ( $H_1$  ou  $H_a$  ou  $H_A$ )** é a afirmativa de que o parâmetro tem um valor que difere da hipótese nula.

Proporções	$H_1: p > 0,5$	$H_1: p < 0,5$	$H_1: p \neq 0,5$
Médias	$H_1: \mu > 98,6$	$H_1: \mu < 98,6$	$H_1: \mu \neq 98,6$
Desvios padrões	$H_1: \sigma > 15$	$H_1: \sigma < 15$	$H_1: \sigma \neq 15$

## ALGUMAS OBSERVAÇÕES

- **Sobre o sinal de igualdade em  $H_0$ :**
  - Alguns livros usam os símbolos  $\leq$  ou  $\geq$ .
  - Porém, Triola sugere fazer o teste de hipótese supondo que a proporção, média ou desvio padrão seja **igual** a algum valor especificado.
  
- **Sobre o estabelecimento de suas próprias hipóteses:**
  - Se você usa um teste de hipótese para **apoiar sua afirmativa**, esta deve ser sua hipótese alternativa (hipótese de pesquisa).
  - Deve ser escrita usando os símbolos  $<$  ou  $>$  ou  $\neq$ .
  - Não se deve usar teste de hipótese para apoiar afirmativa de que parâmetro seja igual a algum valor especificado.

## IDENTIFICAÇÃO DE $H_0$ E $H_1$

- Identifique a afirmativa ou hipótese específica a ser testada e expresse-a em forma simbólica.
- Dê a forma simbólica que tem que ser verdadeira quando a afirmativa original é falsa.
- Das duas expressões simbólicas obtidas até agora:
  - Faça a expressão da que não contém a igualdade: a hipótese alternativa  $H_1$ , utilizando o símbolo  $<$  ou  $>$  ou  $\neq$ .
  - Deixe que a hipótese nula  $H_0$  seja a expressão simbólica que iguala o parâmetro ao valor fixo sendo considerado.

# ESTATÍSTICA DE TESTE

- A **estatística de teste** é um valor usado para se tomar a decisão sobre a hipótese nula.
- Essa estatística é encontrada pela **conversão da estatística** amostral em um escore com a suposição de que a hipótese nula seja verdadeira.

- Estatística de teste para a **proporção**: 
$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

- Estatística de teste para a **média**:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

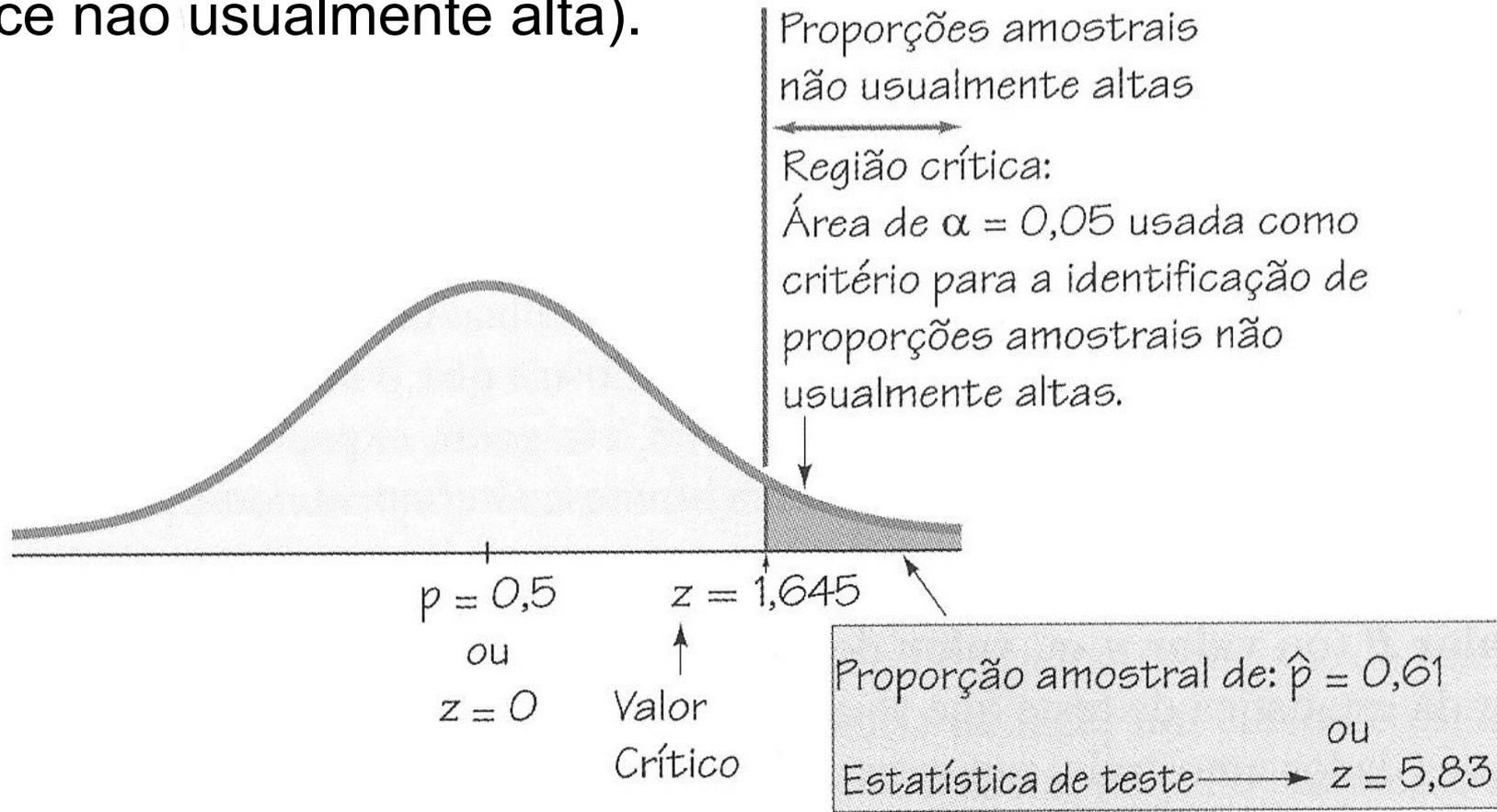
- Estatística de teste para o **desvio padrão**: 
$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma^2}$$

# REGIÃO CRÍTICA, NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA, VALOR CRÍTICO

- **Região crítica (região de rejeição)** é o conjunto de todos os valores da estatística de teste que nos fazem rejeitar a hipótese nula.
- **Nível de significância ( $\alpha$ )** é a probabilidade da estatística de teste cair na região crítica quando a hipótese nula for verdadeira. É o complemento do **nível de confiança ( $1-\alpha$ )**.
  - Se estatística de teste cair na região crítica, rejeitamos a hipótese nula, sendo  $\alpha$  igual à probabilidade de cometer o erro de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira.
- **Valor crítico** é qualquer valor que separa a região crítica (em que rejeitamos  $H_0$ ) dos valores da estatística de teste que não levam à rejeição da hipótese nula.
  - Depende da hipótese nula, distribuição amostral e  $\alpha$ .

# REGIÃO CRÍTICA, VALOR CRÍTICO, ESTATÍSTICA DE TESTE

- Proporção amostral de 0,61 é convertida em estatística de teste ( $z=5,83$ ). Ela não têm chance de ocorrer por acaso (chance não usualmente alta).

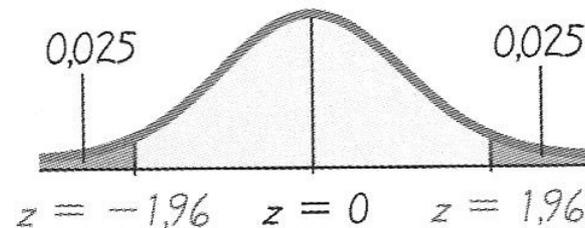


Proporção de trabalhadores que acharam seu emprego através de redes de amigos

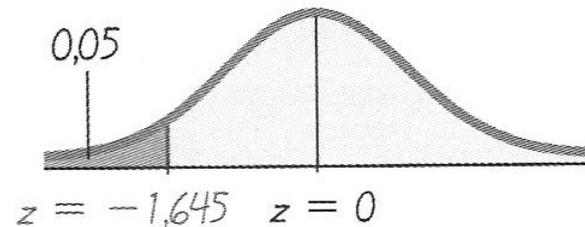
# BILATERAL, UNILATERAL À ESQUERDA OU À DIREITA

– Caudas em uma distribuição são as regiões extremas limitadas pelos valores críticos e dependem de  $H_1$ .

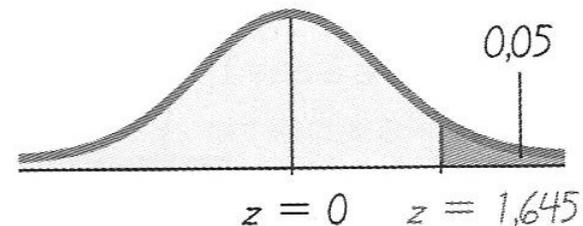
– **Teste bilateral:** região crítica está nas duas regiões extremas sob a curva.



– **Teste unilateral à esquerda:** região crítica está na região extrema esquerda sob a curva.

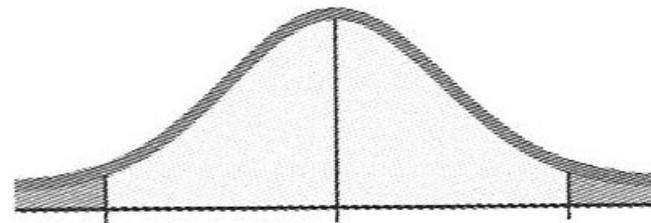


– **Teste unilateral à direita:** região crítica está na região extrema direita sob a curva.

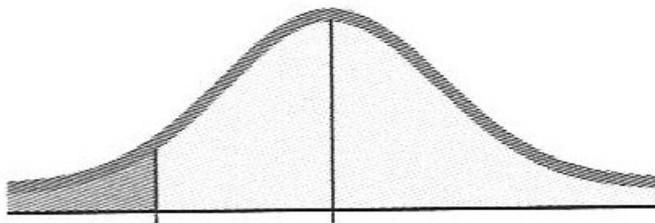


## MAIS SOBRE TIPO DE TESTES

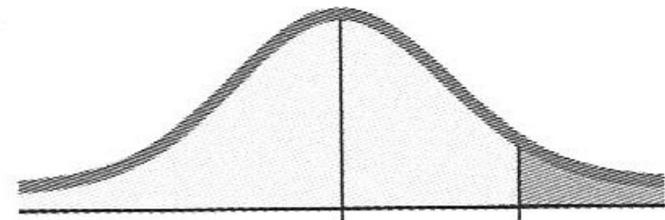
- Cauda será a região crítica com valores que entrarão em conflito significativo com hipótese nula.
- O sinal de desigualdade em  $H_1$  indica a direção da região crítica.



Sinal usado em  $H_1: \neq$   
Teste bilateral



Sinal usado em  $H_1: <$   
Teste unilateral à esquerda

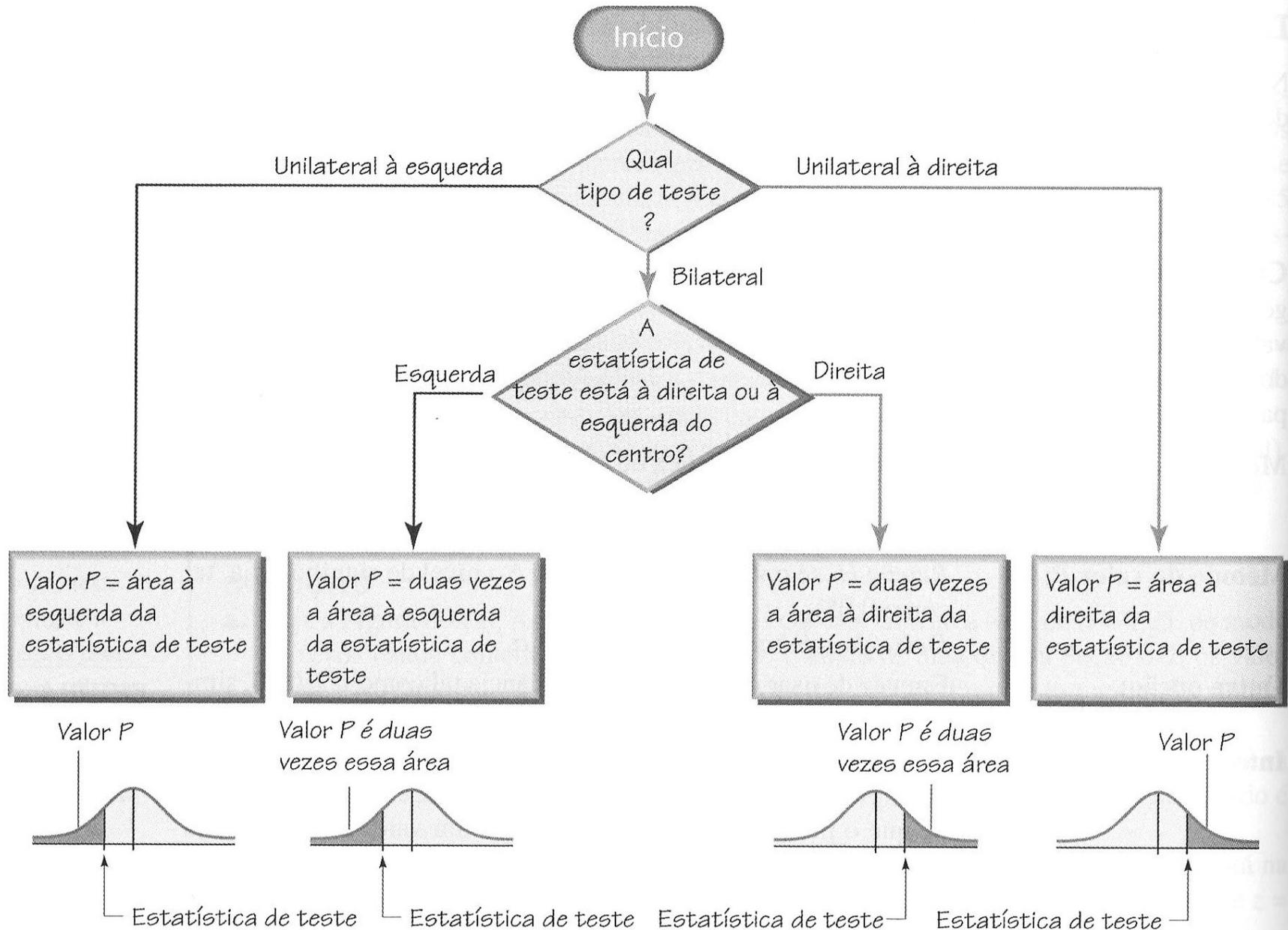


Sinal usado em  $H_1: >$   
Teste unilateral à direita

## VALOR $P$

- **Valor  $P$  (ou valor  $p$  ou valor de probabilidade)** é a probabilidade de se obter um valor da estatística de teste que seja, no mínimo, tão extremo quanto aquele que representa os dados amostrais, supondo que a hipótese nula seja verdadeira.
- Hipótese nula é rejeitada se valor  $P$  for muito pequeno, por exemplo, igual ou menor a 0,05.
- Pequeno valor  $P$  indica que resultados amostrais têm pouca chance de ocorrer por acaso. Ou seja, dados apresentam tendência, rejeitando  $H_0$ .
- Podemos ainda pensar esse valor como sendo a probabilidade da hipótese nula não ser rejeitada.

# PROCEDIMENTO PARA DETERMINAR VALORES P



## DECISÕES E CONCLUSÕES

- Nosso procedimento padrão de teste de hipótese requer que testemos sempre a hipótese nula, de modo que nossa **conclusão inicial** será sempre uma das seguintes:
  - Rejeitar a hipótese nula.
  - Deixar de rejeitar a hipótese nula.
  
- A **decisão** de rejeitar ou não rejeitar  $H_0$  é feita com:
  - Método tradicional (clássico).
  - Método do valor  $P$  (método mais usado atualmente).
  - Intervalos de confiança.

# CRITÉRIO DE DECISÃO

## – Método tradicional (clássico):

- Rejeite  $H_0$ : se estatística de teste ficar dentro da região crítica.
- Deixe de rejeitar  $H_0$ : se estatística de teste não ficar dentro da região crítica.

## – Método do valor $P$ :

- Rejeite  $H_0$ : se valor  $P \leq \alpha$  ( $\alpha$  é o nível de significância).
- Deixe de rejeitar  $H_0$ : se o valor  $P > \alpha$ .

## – Outra opção: em vez de usar valor para $\alpha$ , indique valor $P$ .

## – Intervalos de confiança: rejeite afirmativa de que parâmetro populacional tenha um valor que não esteja no IC.

## REDAÇÃO DA CONCLUSÃO FINAL

- Devemos usar termos simples (não-técnicos) para escrever a conclusão final sobre o teste de hipótese.
- Se você deseja **apoiar** uma afirmativa, formule-a para ser a hipótese alternativa, de modo a **rejeitar** a hipótese nula.
- Alguns textos dizem “aceitar a hipótese nula” em vez de “deixar de rejeitar a hipótese nula”:
  - Porém, devemos saber que não estamos provando  $H_0$ .
  - Termo “aceitar” é enganoso, pois implica que  $H_0$  foi provada.
  - “Deixar de rejeitar” é mais apropriado, pois dizemos que evidência amostral não é forte o bastante para rejeitar  $H_0$ .

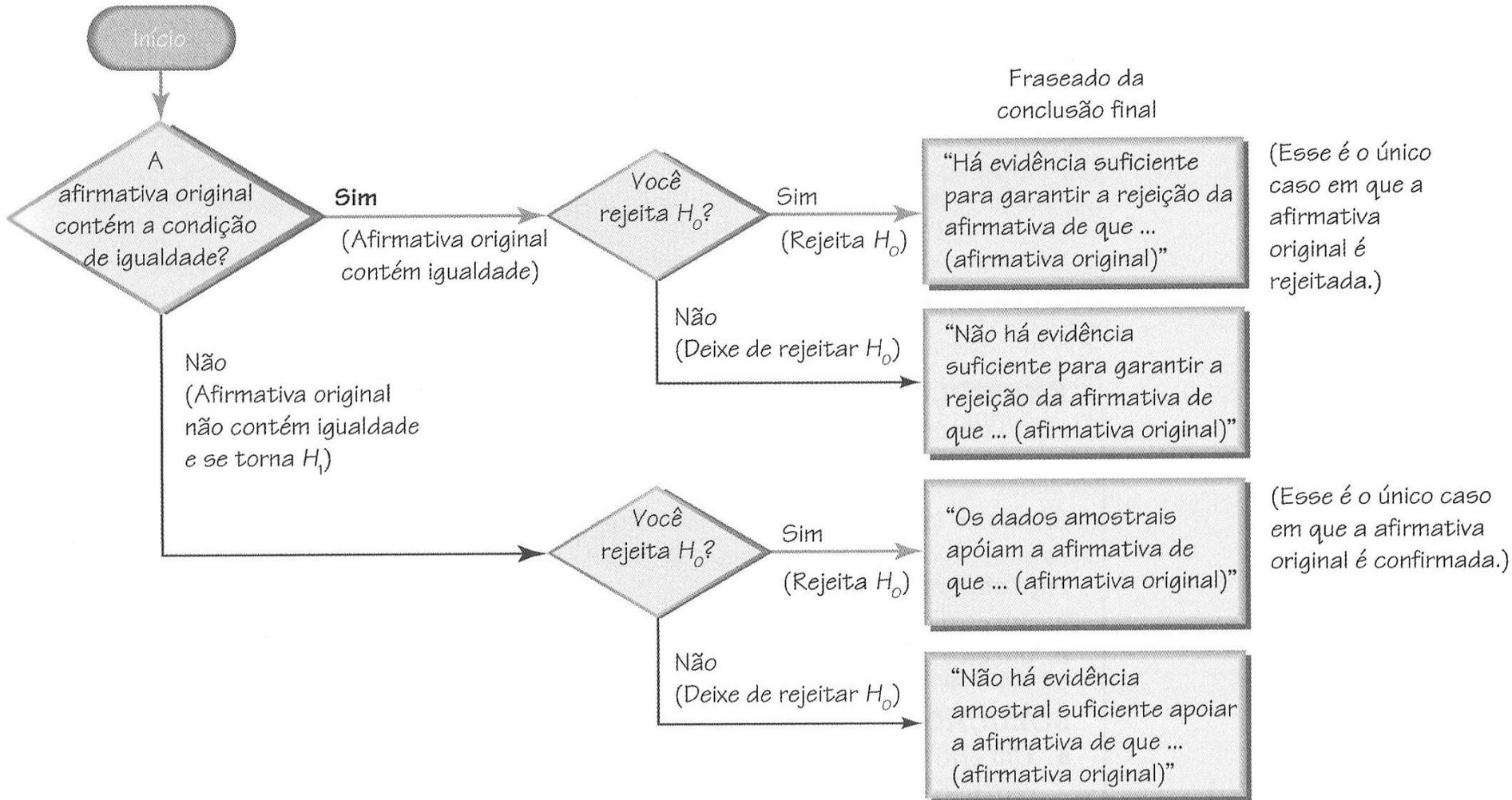
## EVITE NEGATIVAS MÚLTIPLAS

- Em vez de dizer:
  - **Não** há evidência suficiente para garantir a **rejeição** da afirmativa de **nenhuma** diferença entre 0,5 e a proporção populacional.
  
- Seria melhor usar:
  - Deixa-se de **rejeitar** a afirmativa de que a proporção populacional seja igual a 0,5.

ou

- Até que se obtenha evidência mais forte, continuamos admitindo que a proporção populacional seja igual a 0,5.

# PROCEDIMENTO PARA ESCREVER CONCLUSÃO FINAL



## ERROS TIPO I E TIPO II

- Ao testar  $H_0$ , chegamos a uma conclusão de rejeitá-la ou de deixar de rejeitá-la.
- Tais conclusões pode estar corretas ou erradas.

		Estado verdadeiro da natureza	
		A hipótese nula é verdadeira	A hipótese nula é falsa
Decisão	Decidimos rejeitar a hipótese nula.	Erro tipo I (rejeitar uma hipótese nula verdadeira) $\alpha$	Decisão Correta
	Deixamos de rejeitar a hipótese nula	Decisão Correta	Erro tipo II (deixar de rejeitar uma hipótese nula falsa) $\beta$

- $\alpha$ : probabilidade de erro tipo I (probabilidade de rejeitar hipótese nula quando ela é verdadeira).
- $\beta$ : probabilidade de erro tipo II (probabilidade de deixar de rejeitar hipótese nula quando ela é falsa).

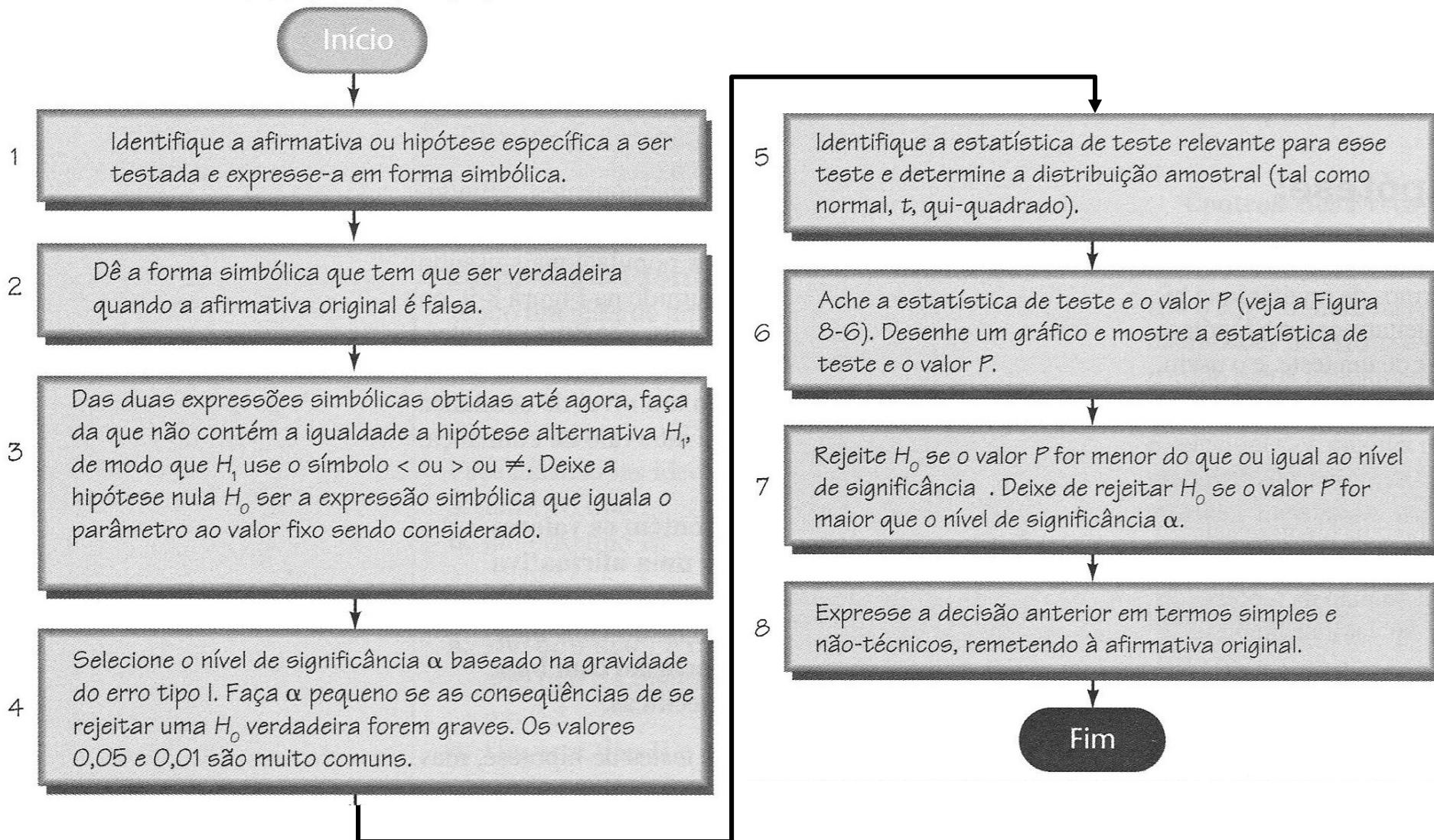
## CONTROLE DOS ERROS TIPO I E TIPO II

- No procedimento para teste de hipóteses, selecionamos um nível de significância ( $\alpha$ ), que é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira (erro tipo I).
- Porém, não selecionamos ( $\beta$ ), que é a probabilidade de deixar de rejeitar  $H_0$  quando ela é falsa (erro tipo II).
- Alfa ( $\alpha$ ), beta ( $\beta$ ) e tamanho amostral ( $n$ ) estão relacionados: se determinamos dois deles, o terceiro está determinado.
- Geralmente selecionamos primeiro  $\alpha$  e  $n$ :
  - Para qualquer  $\alpha$  fixo, aumento em  $n$  causará diminuição em  $\beta$ .
  - Para qualquer  $n$  fixo, diminuição em  $\alpha$  causará aumento em  $\beta$  e vice-versa.
  - Para diminuir  $\alpha$  e  $\beta$ , aumente  $n$ .

# TESTE DE HIPÓTESE ABRANGENTE

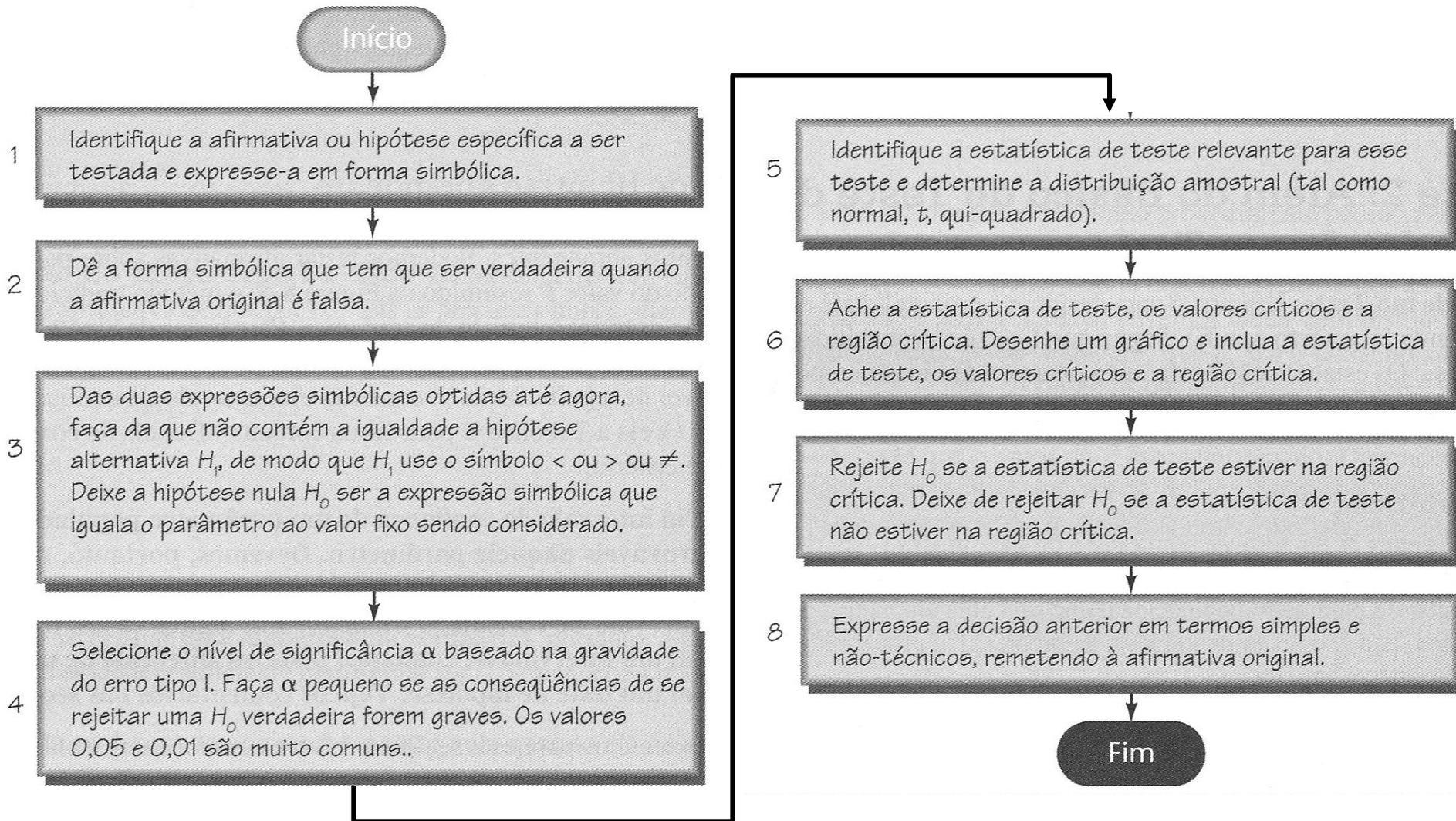
- Foram descritos componentes individuais de um teste de hipótese.
- Podemos testar afirmativas sobre parâmetros populacionais com:
  - **Método do valor  $P$ .**
  - **Método tradicional.**
  - **Método do intervalo de confiança.**

# MÉTODO DO VALOR P



**Figura 8-6 = Slide 18**

# MÉTODO TRADICIONAL



## MÉTODO DO INTERVALO DE CONFIANÇA

- Construa um **intervalo de confiança** (IC) com o **nível de confiança** (NC) ou **nível de significância** ( $\alpha$ ) selecionado.
- Teste de hipótese bilateral constrói IC com  $NC = 1 - \alpha$ .
- Teste de hipótese unilateral constrói IC com  $NC = 1 - 2\alpha$ .

Tabela 8-2

Nível de Confiança para o Intervalo de Confiança

		Teste Bilateral	Teste Unilateral
Nível de	0,01	99%	98%
Significância	0,05	95%	90%
para o Teste	0,10	90%	80%
de Hipótese			

- A estimativa de intervalo de confiança de um parâmetro populacional contém os valores prováveis do parâmetro.
- Rejeite uma afirmativa de que o parâmetro populacional tem um valor que não está incluído no intervalo de confiança.

## O PODER DE UM TESTE

- Usamos  $\beta$  para designar a probabilidade de deixar de rejeitar uma hipótese nula falsa (**erro tipo II**).
- **Poder de um teste** de hipótese é a probabilidade  $(1-\beta)$  de se rejeitar uma hipótese nula falsa.
  - Essa probabilidade é calculada usando um **nível de significância** específico ( $\alpha$ ) e um valor particular do parâmetro populacional que seja uma alternativa ( $H_1$ ) ao valor assumido na hipótese nula ( $H_0$ ).
- O **poder de um teste** de hipótese é a probabilidade de se apoiar uma hipótese alternativa ( $H_1$ ) verdadeira.
- **Dependendo dos valores** particulares escolhidos como alternativos à hipótese nula, poder do teste será diferente.
- Geralmente é exigido poder de teste entre 0,8 e 0,9.

# TESTE DE UMA AFIRMATIVA SOBRE UMA PROPORÇÃO

# REQUISITOS PARA PROPORÇÃO POPULACIONAL

- Requisitos para testar afirmativas sobre uma proporção populacional  $p$ :
- Amostra aleatória simples.
- Distribuição binomial satisfeita (número fixo de tentativas independentes tendo probabilidades constantes; duas categorias de resultados).
- Distribuição binomial das proporções amostrais pode ser aproximada por uma distribuição normal ( $np \geq 5$  e  $nq \geq 5$ ).

# PROPORÇÃO POPULACIONAL

## – Notação:

- $n$  = tamanho da amostra ou número de tentativas
- $p$ -chapéu =  $x / n$  (proporção amostral)
- $p$  = proporção populacional (usada na hipótese nula)
- $q = 1 - p$

## – Estatística de teste para testar uma afirmativa sobre a proporção populacional:

- Valores  $P$ : distribuição normal padrão
- Valores críticos: distribuição normal padrão
- Estatística de teste:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

**TESTE DE UMA AFIRMATIVA SOBRE UMA MÉDIA:  
 $\sigma$  CONHECIDO**

## REQUISITOS PARA MÉDIA POPULACIONAL COM $\sigma$ CONHECIDO

- Requisitos para testar afirmativas sobre uma média populacional com  $\sigma$  conhecido:
- Amostra aleatória simples.
- Valor do desvio padrão populacional  $\sigma$  é conhecido.
- População é normalmente distribuída e/ou  $n > 30$ .

# MÉDIA POPULACIONAL COM $\sigma$ CONHECIDO

## – Notação:

- $n$  = tamanho da amostra
- $\bar{x}$  = média amostral
- $\mu$  = média populacional (usada na hipótese nula)
- $\sigma$  = desvio padrão populacional conhecido

## – **Estatística de teste** para testar uma afirmativa sobre a média populacional com $\sigma$ conhecido:

- Valores  $P$ : distribuição normal padrão
- Valores críticos: distribuição normal padrão
- Estatística de teste:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

**TESTE DE UMA AFIRMATIVA SOBRE UMA MÉDIA:  
 $\sigma$  DESCONHECIDO**

## REQUISITOS PARA MÉDIA POPULACIONAL COM $\sigma$ DESCONHECIDO

- Requisitos para testar afirmativas sobre uma média populacional com  $\sigma$  desconhecido:
  - Amostra aleatória simples.
  - Valor do desvio padrão populacional  $\sigma$  não é conhecido.
  - População é normalmente distribuída e/ou  $n > 30$ .

# MÉDIA POPULACIONAL COM $\sigma$ DESCONHECIDO

## – Notação:

- $n$  = tamanho da amostra
- $\bar{x}$  = média amostral
- $\mu$  = média populacional (usada na hipótese nula)
- $s$  = desvio padrão da amostra

## – Estatística de teste para testar uma afirmativa sobre a média populacional com $\sigma$ desconhecido:

- Valores  $P$ : distribuição  $t$  de Student, com  $(n-1)$  graus de liberdade (gl).

- Valores críticos: distribuição  $t$  de Student, com  $(n-1)$  graus de liberdade (gl)

- Estatística de teste: 
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

# **TESTE DE UMA AFIRMATIVA SOBRE UM DESVIO PADRÃO OU UMA VARIÂNCIA**

# REQUISITOS PARA DESVIO PADRÃO OU VARIÂNCIA

- Requisitos para testar afirmativas sobre um desvio padrão ou uma variância:
- Amostra aleatória simples.
- População é normalmente distribuída (exigência mais estrita do que a exigência de normalidade para médias).

# DESVIO PADRÃO OU VARIÂNCIA

## – Notação:

- $n$  = tamanho da amostra
- $s^2$  = variância amostral
- $\sigma^2$  = variância populacional (usada na hipótese nula)

## – Estatística de teste para testar uma afirmativa sobre o desvio padrão ou variância populacional:

- Valores  $P$ : distribuição qui-quadrado, com  $(n-1)$  graus de liberdade (gl).
- Valores críticos: distribuição qui-quadrado, com  $(n-1)$  graus de liberdade (gl).
- Estatística de teste:

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma^2}$$