

AULA 05

Teste de Hipótese

Ernesto F. L. Amaral

03 de setembro de 2012

Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas (FAFICH)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Fonte:

Triola, Mario F. 2008. “Introdução à estatística”. 10^a ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 8 (pp.304-359).

ESQUEMA DA AULA

- Fundamentos do teste de hipótese.
- Teste de uma afirmativa sobre uma proporção.
- Teste de uma afirmativa sobre uma média: σ conhecido.
- Teste de uma afirmativa sobre uma média: σ desconhecido.
- Teste de uma afirmativa sobre um desvio padrão ou uma variância.

FUNDAMENTOS DO TESTE DE HIPÓTESE

HIPÓTESE

- **Inferência estatística** usa dados amostrais para duas atividades principais:
 - Estimar parâmetro populacional.
 - Testar hipótese ou afirmativa sobre parâmetro populacional.

- Em estatística, **hipótese** é uma afirmativa sobre uma propriedade da população.

- **Teste de hipótese** (teste de significância) é um procedimento padrão para se testar uma afirmativa sobre uma propriedade da população.

REGRA DO EVENTO RARO

- Métodos de teste de hipótese se baseiam na **regra do evento raro** em inferência estatística.
- Se, sob uma dada suposição, a probabilidade de um evento observado particular é excepcionalmente pequena, concluimos que a suposição provavelmente não é correta.
- Testamos uma afirmativa analisando dados amostrais na tentativa de distinguir entre resultados que podem facilmente ocorrer por acaso e resultados que são altamente improváveis de ocorrer por acaso.

FUNDAMENTOS DO TESTE DE HIPÓTESE

- É importante entender os **componentes individuais** de um teste de hipótese.
- **Conceitos básicos:** hipótese nula, hipótese alternativa, estatística de teste, região crítica, nível de significância, valor crítico, valor P , erro tipo I e erro tipo II.
- **Além do básico:** poder de um teste.

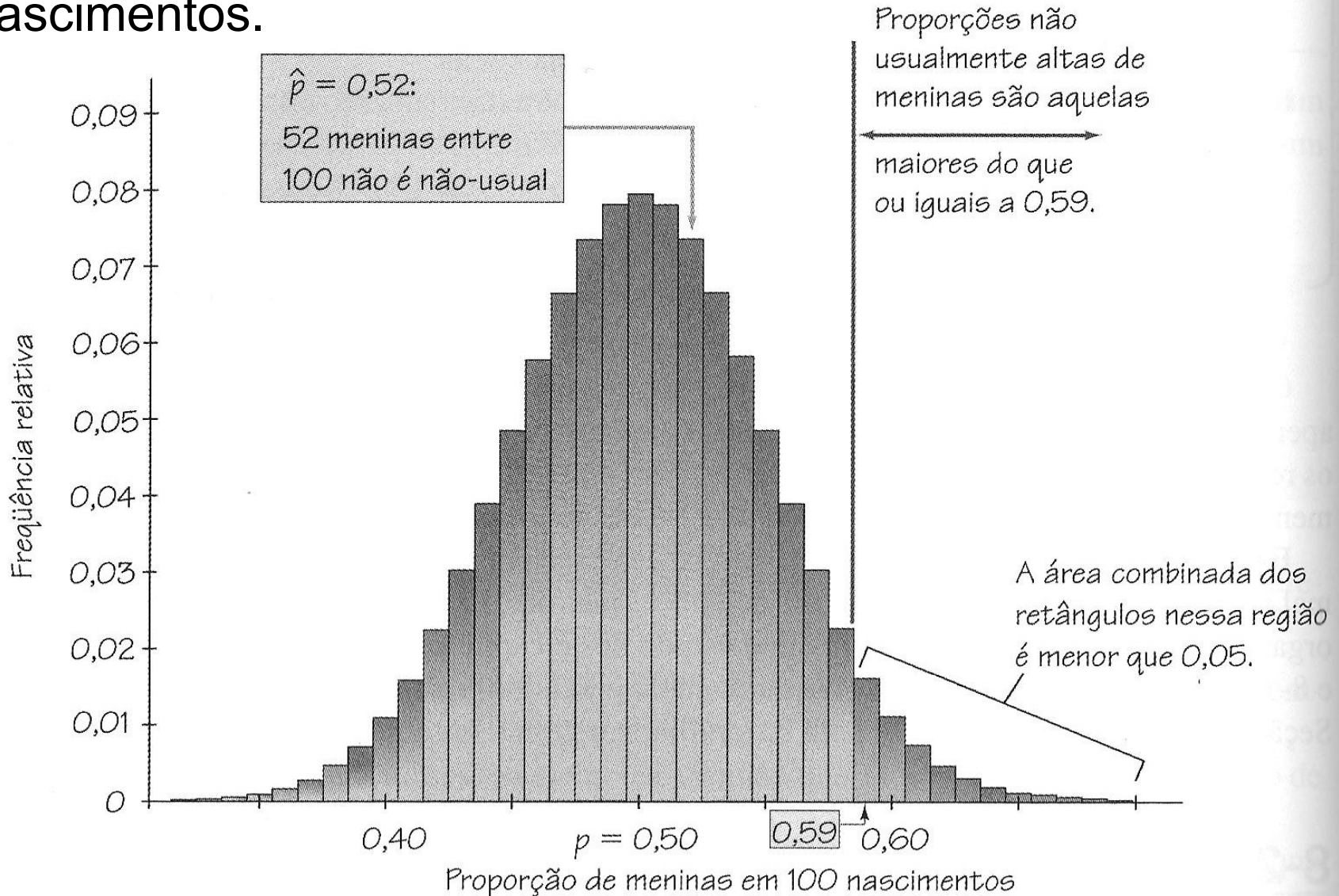
CONCEITOS BÁSICOS DE TESTES DE HIPÓTESES

– Objetivos:

- Dada uma afirmativa, identificar a hipótese nula e a hipótese alternativa e expressar ambas em forma simbólica.
- Dadas uma afirmativa e dados amostrais, calcular o valor da estatística de teste.
- Dado um nível de significância, identificar os valores críticos.
- Dado um valor da estatística de teste, identificar o valor P .
- Estabelecer a conclusão de um teste de hipótese em termos simples, não-técnicos.

EXEMPLO

- Distribuição amostral das proporções de meninas em 100 nascimentos.



COMPONENTES DE UM TESTE DE HIPÓTESE FORMAL

- **Hipótese nula (H_0)** é uma afirmativa de que o valor de um parâmetro populacional (proporção, média ou desvio padrão) é igual a algum valor especificado.
 - Testamos a hipótese, supondo que ela seja verdadeira e chegamos à conclusão para rejeitar ou não rejeitar H_0 .
 - Por exemplo: $H_0: p=0,5$; ou $H_0: \mu=98,6$; ou $H_0: \sigma=15$.

- **Hipótese alternativa (H_1 ou H_a ou H_A)** é a afirmativa de que o parâmetro tem um valor que difere da hipótese nula.

Proporções	$H_1: p > 0,5$	$H_1: p < 0,5$	$H_1: p \neq 0,5$
Médias	$H_1: \mu > 98,6$	$H_1: \mu < 98,6$	$H_1: \mu \neq 98,6$
Desvios padrões	$H_1: \sigma > 15$	$H_1: \sigma < 15$	$H_1: \sigma \neq 15$

ALGUMAS OBSERVAÇÕES

- **Sobre o sinal de igualdade em H_0 :**
 - Alguns livros usam os símbolos \leq ou \geq .
 - Porém, Triola sugere fazer o teste de hipótese supondo que a proporção, média ou desvio padrão seja **igual** a algum valor especificado.

- **Sobre o estabelecimento de suas próprias hipóteses:**
 - Se você usa um teste de hipótese para **apoiar sua afirmativa**, esta deve ser sua hipótese alternativa (hipótese de pesquisa).
 - Deve ser escrita usando os símbolos $<$ ou $>$ ou \neq .
 - Não se deve usar teste de hipótese para apoiar afirmativa de que parâmetro seja igual a algum valor especificado.

IDENTIFICAÇÃO DE H_0 E H_1

- Identifique a afirmativa ou hipótese específica a ser testada e expresse-a em forma simbólica.
- Dê a forma simbólica que tem que ser verdadeira quando a afirmativa original é falsa.
- Das duas expressões simbólicas obtidas até agora:
 - Faça a expressão da que não contém a igualdade: a hipótese alternativa H_1 , utilizando o símbolo $<$ ou $>$ ou \neq .
 - Deixe que a hipótese nula H_0 seja a expressão simbólica que iguala o parâmetro ao valor fixo sendo considerado.

ESTATÍSTICA DE TESTE

- A **estatística de teste** é um valor usado para se tomar a decisão sobre a hipótese nula.
- Essa estatística é encontrada pela **conversão da estatística** amostral em um escore com a suposição de que a hipótese nula seja verdadeira.

- Estatística de teste para a **proporção**:
$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

- Estatística de teste para a **média**:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

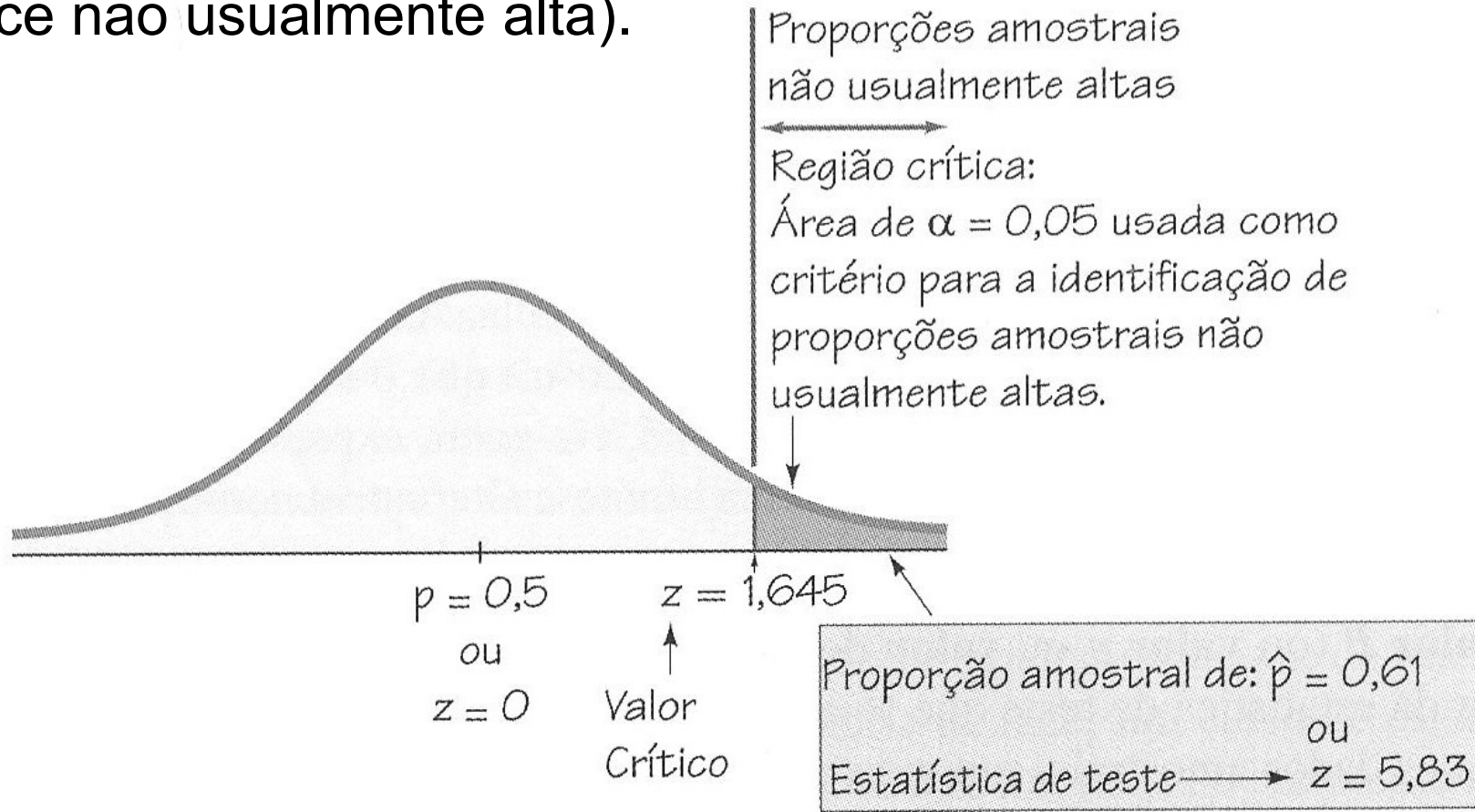
- Estatística de teste para o **desvio padrão**:
$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma^2}$$

REGIÃO CRÍTICA, NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA, VALOR CRÍTICO

- **Região crítica (região de rejeição)** é o conjunto de todos os valores da estatística de teste que nos fazem rejeitar a hipótese nula.
- **Nível de significância (α)** é a probabilidade da estatística de teste cair na região crítica quando a hipótese nula for verdadeira. É o complemento do **nível de confiança ($1-\alpha$)**.
 - Se estatística de teste cair na região crítica, rejeitamos a hipótese nula, sendo α igual à probabilidade de cometer o erro de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira.
- **Valor crítico** é qualquer valor que separa a região crítica (em que rejeitamos H_0) dos valores da estatística de teste que não levam à rejeição da hipótese nula.
 - Depende da hipótese nula, distribuição amostral e α .

REGIÃO CRÍTICA, VALOR CRÍTICO, ESTATÍSTICA DE TESTE

- Proporção amostral de 0,61 é convertida em estatística de teste ($z=5,83$). Ela não têm chance de ocorrer por acaso (chance não usualmente alta).

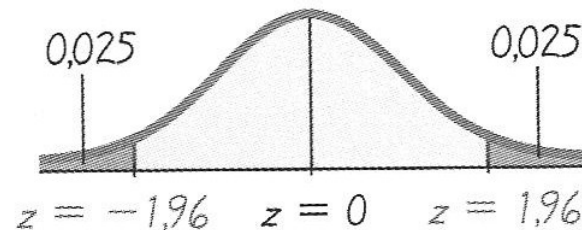


Proporção de trabalhadores que acharam seu emprego através de redes de amigos

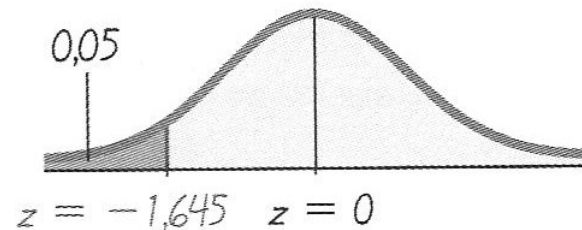
BILATERAL, UNILATERAL À ESQUERDA OU À DIREITA

– Caudas em uma distribuição são as regiões extremas limitadas pelos valores críticos e dependem de H_1 .

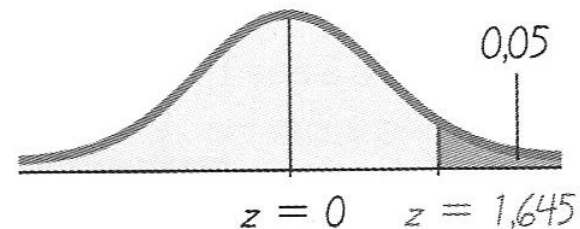
– **Teste bilateral:** região crítica está nas duas regiões extremas sob a curva.



– **Teste unilateral à esquerda:** região crítica está na região extrema esquerda sob a curva.

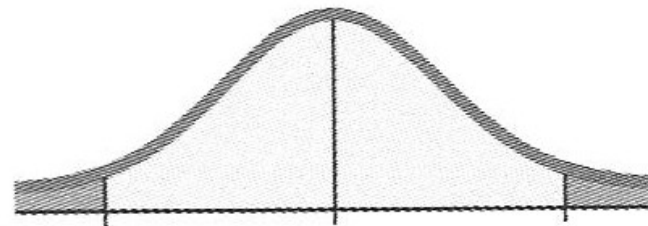


– **Teste unilateral à direita:** região crítica está na região extrema direita sob a curva.

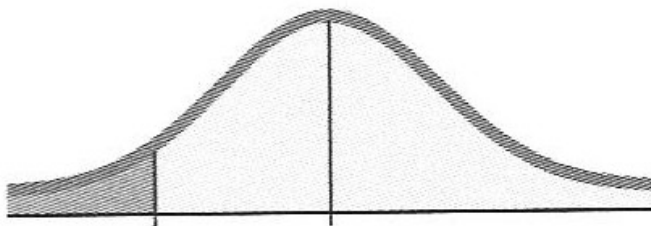


MAIS SOBRE TIPO DE TESTES

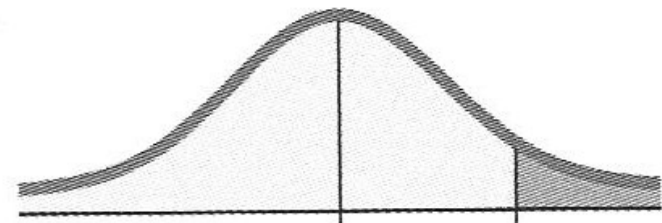
- Cauda será a região crítica com valores que entrarão em conflito significativo com hipótese nula.
- O sinal de desigualdade em H_1 indica a direção da região crítica.



Sinal usado em $H_1: \neq$
Teste bilateral



Sinal usado em $H_1: <$
Teste unilateral à esquerda

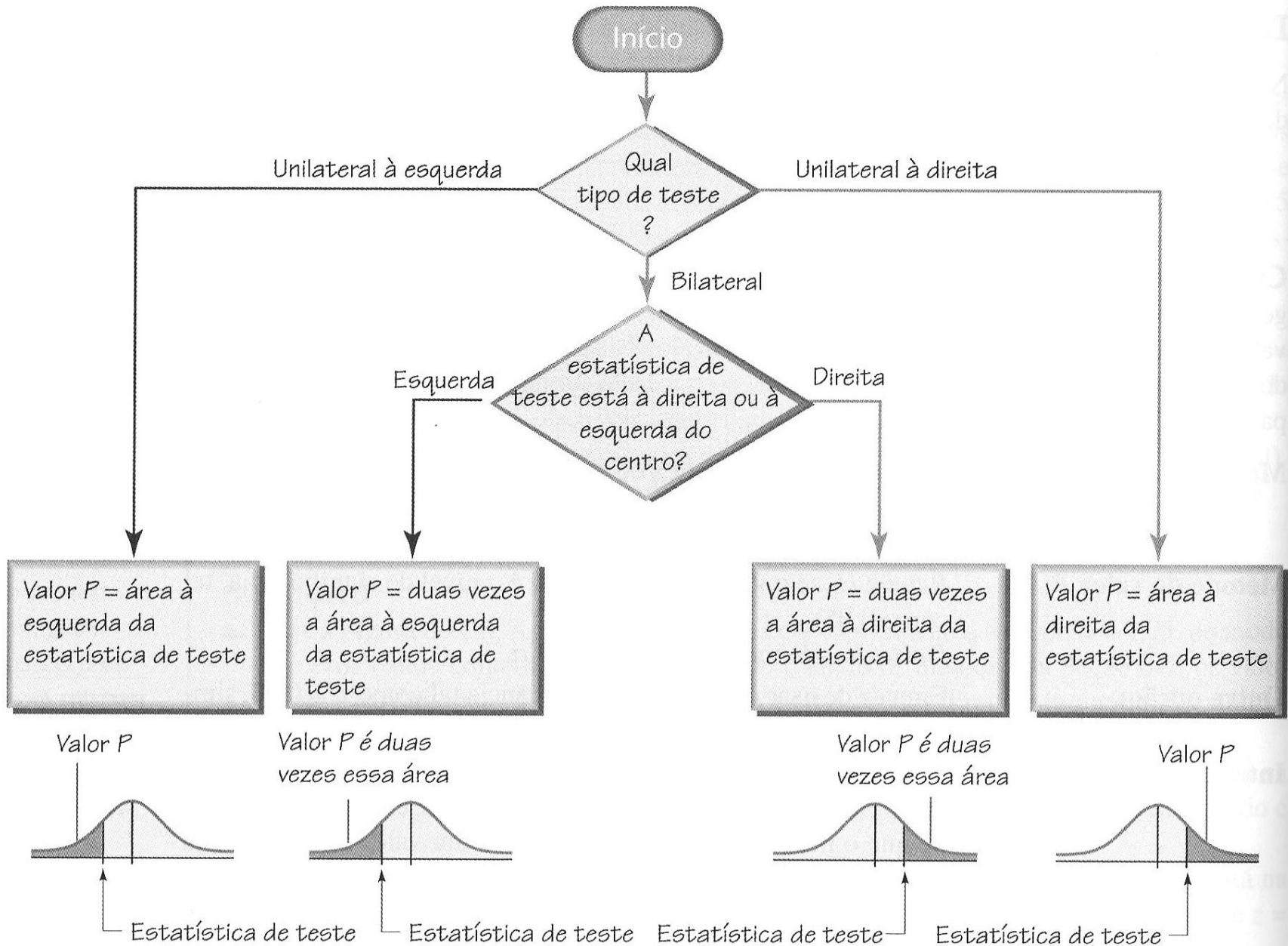


Sinal usado em $H_1: >$
Teste unilateral à direita

VALOR P

- **Valor P (ou valor p ou valor de probabilidade)** é a probabilidade de se obter um valor da estatística de teste que seja, no mínimo, tão extremo quanto aquele que representa os dados amostrais, supondo que a hipótese nula seja verdadeira.
- Hipótese nula é rejeitada se valor P for muito pequeno, por exemplo, igual ou menor a 0,05.
- Pequeno valor P indica que resultados amostrais têm pouca chance de ocorrer por acaso. Ou seja, dados apresentam tendência, rejeitando H_0 .
- Podemos ainda pensar esse valor como sendo a probabilidade da hipótese nula não ser rejeitada.

PROCEDIMENTO PARA DETERMINAR VALORES P



DECISÕES E CONCLUSÕES

- Nosso procedimento padrão de teste de hipótese requer que testemos sempre a hipótese nula, de modo que nossa **conclusão inicial** será sempre uma das seguintes:
 - Rejeitar a hipótese nula.
 - Deixar de rejeitar a hipótese nula.

- A **decisão** de rejeitar ou não rejeitar H_0 é feita com:
 - Método tradicional (clássico).
 - Método do valor P (método mais usado atualmente).
 - Intervalos de confiança.

CRITÉRIO DE DECISÃO

– Método tradicional (clássico):

- Rejeite H_0 : se estatística de teste ficar dentro da região crítica.
- Deixe de rejeitar H_0 : se estatística de teste não ficar dentro da região crítica.

– Método do valor P :

- Rejeite H_0 : se valor $P \leq \alpha$ (α é o nível de significância).
- Deixe de rejeitar H_0 : se o valor $P > \alpha$.

– Outra opção: em vez de usar valor para α , indique valor P .

– Intervalos de confiança: rejeite afirmativa de que parâmetro populacional tenha um valor que não esteja no IC.

REDAÇÃO DA CONCLUSÃO FINAL

- Devemos usar termos simples (não-técnicos) para escrever a conclusão final sobre o teste de hipótese.
- Se você deseja **apoiar** uma afirmativa, formule-a para ser a hipótese alternativa, de modo a **rejeitar** a hipótese nula.
- Alguns textos dizem “aceitar a hipótese nula” em vez de “deixar de rejeitar a hipótese nula”:
 - Porém, devemos saber que não estamos provando H_0 .
 - Termo “aceitar” é enganoso, pois implica que H_0 foi provada.
 - “Deixar de rejeitar” é mais apropriado, pois dizemos que evidência amostral não é forte o bastante para rejeitar H_0 .

EVITE NEGATIVAS MÚLTIPLAS

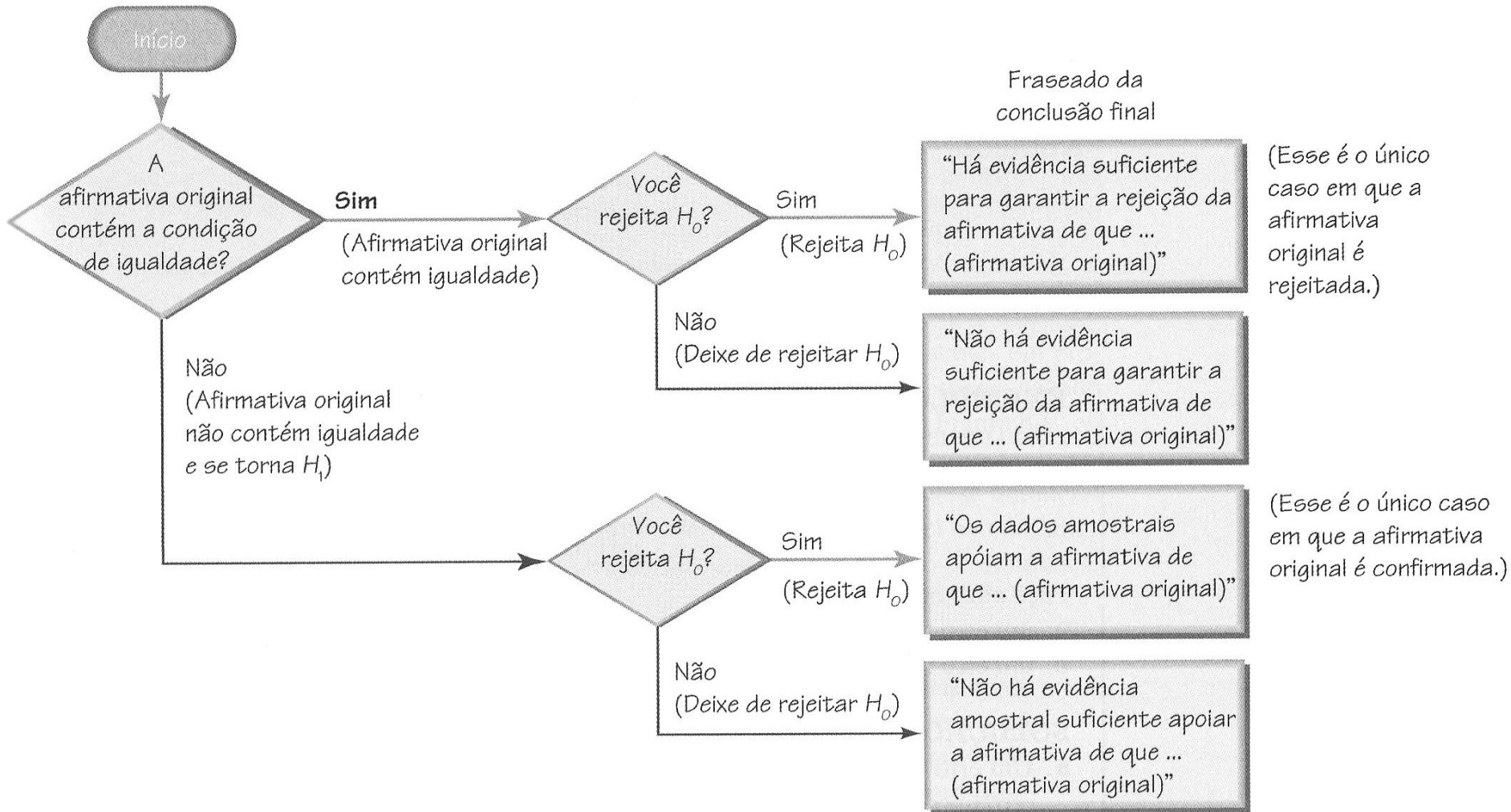
- Em vez de dizer:
 - **Não** há evidência suficiente para garantir a **rejeição** da afirmativa de **nenhuma** diferença entre 0,5 e a proporção populacional.

- Seria melhor usar:
 - Deixa-se de **rejeitar** a afirmativa de que a proporção populacional seja igual a 0,5.

ou

- Até que se obtenha evidência mais forte, continuamos admitindo que a proporção populacional seja igual a 0,5.

PROCEDIMENTO PARA ESCREVER CONCLUSÃO FINAL



ERROS TIPO I E TIPO II

- Ao testar H_0 , chegamos a uma conclusão de rejeitá-la ou de deixar de rejeitá-la.
- Tais conclusões pode estar corretas ou erradas.

		Estado verdadeiro da natureza	
		A hipótese nula é verdadeira	A hipótese nula é falsa
Decisão	Decidimos rejeitar a hipótese nula.	Erro tipo I (rejeitar uma hipótese nula verdadeira) α	Decisão Correta
	Deixamos de rejeitar a hipótese nula	Decisão Correta	Erro tipo II (deixar de rejeitar uma hipótese nula falsa) β

- α : probabilidade de erro tipo I (probabilidade de rejeitar hipótese nula quando ela é verdadeira).
- β : probabilidade de erro tipo II (probabilidade de deixar de rejeitar hipótese nula quando ela é falsa).

CONTROLE DOS ERROS TIPO I E TIPO II

- No procedimento para teste de hipóteses, selecionamos um nível de significância (α), que é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira (erro tipo I).
- Porém, não selecionamos (β), que é a probabilidade de deixar de rejeitar H_0 quando ela é falsa (erro tipo II).
- Alfa (α), beta (β) e tamanho amostral (n) estão relacionados: se determinamos dois deles, o terceiro está determinado.
- Geralmente selecionamos primeiro α e n :
 - Para qualquer α fixo, aumento em n causará diminuição em β .
 - Para qualquer n fixo, diminuição em α causará aumento em β e vice-versa.
 - Para diminuir α e β , aumente n .

TESTE DE HIPÓTESE ABRANGENTE

- Foram descritos componentes individuais de um teste de hipótese.
- Podemos testar afirmativas sobre parâmetros populacionais com:
 - **Método do valor P .**
 - **Método tradicional.**
 - **Método do intervalo de confiança.**

MÉTODO DO VALOR P

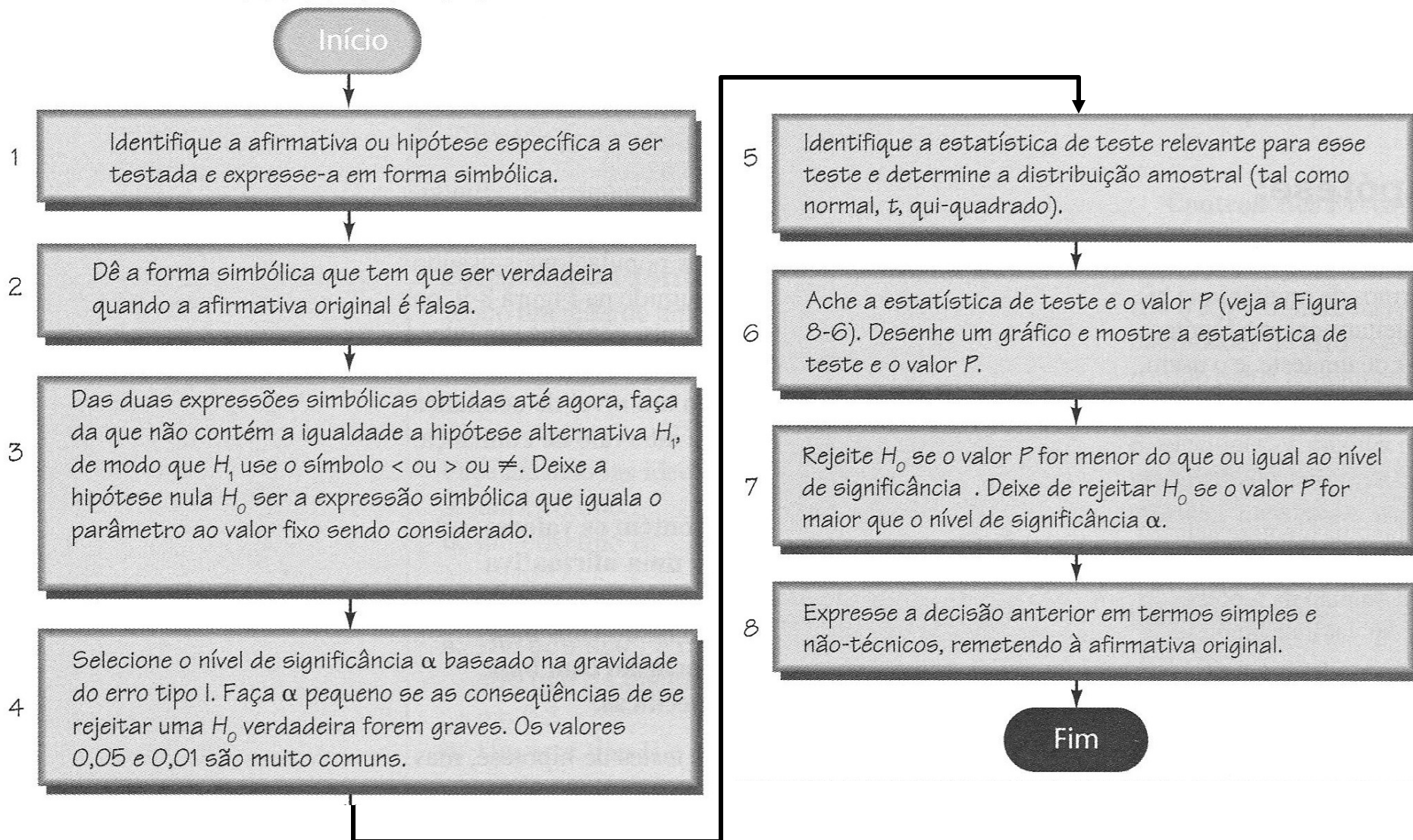
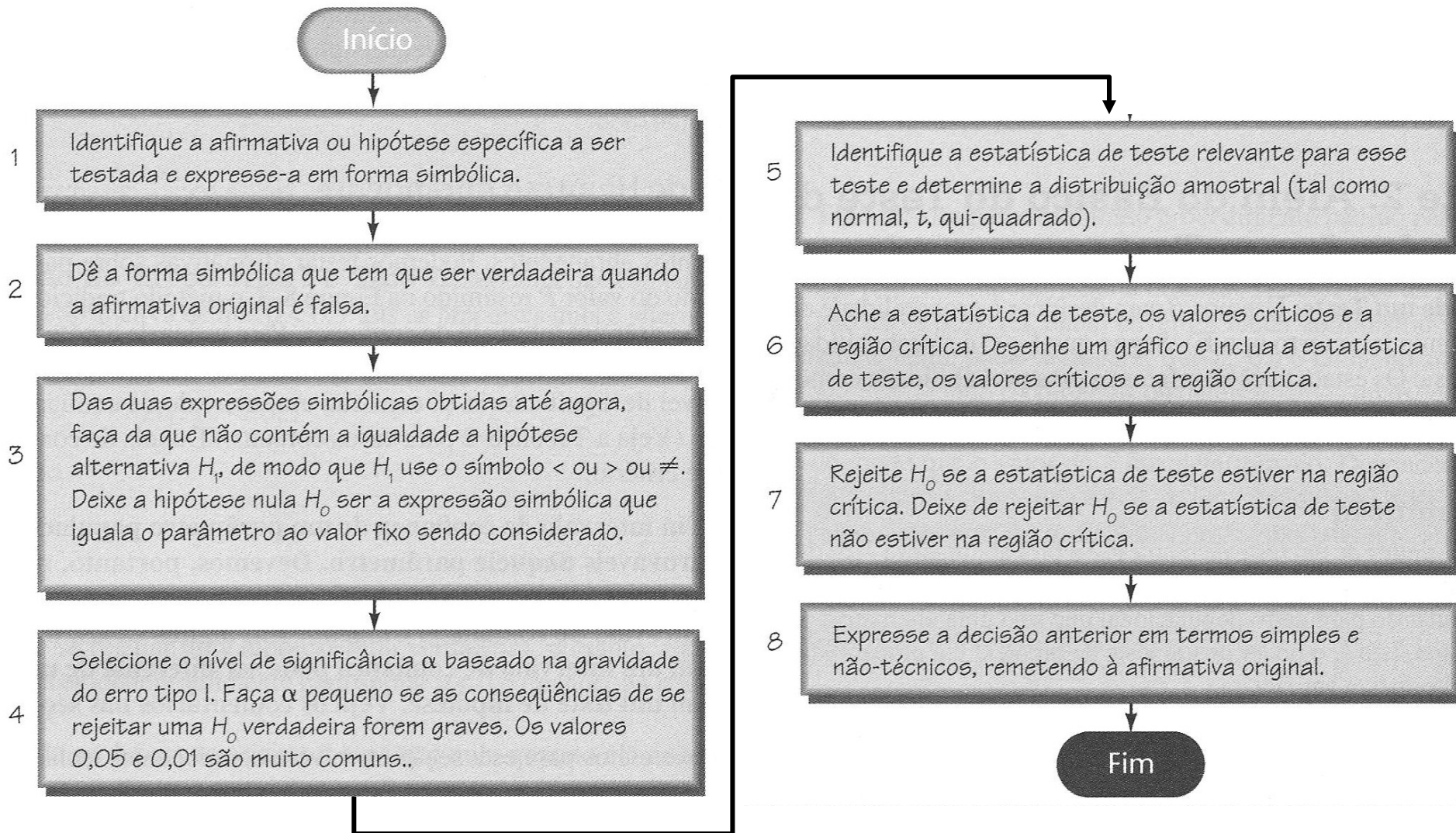


Figura 8-6 = Slide 18

MÉTODO TRADICIONAL



MÉTODO DO INTERVALO DE CONFIANÇA

- Construa um **intervalo de confiança** (IC) com o **nível de confiança** (NC) ou **nível de significância** (α) selecionado.
- Teste de hipótese bilateral constrói IC com $NC = 1 - \alpha$.
- Teste de hipótese unilateral constrói IC com $NC = 1 - 2\alpha$.

Tabela 8-2

Nível de Confiança para o Intervalo de Confiança

		Teste Bilateral	Teste Unilateral
Nível de	0,01	99%	98%
Significância	0,05	95%	90%
para o Teste	0,10	90%	80%
de Hipótese			

- A estimativa de intervalo de confiança de um parâmetro populacional contém os valores prováveis do parâmetro.
- Rejeite uma afirmativa de que o parâmetro populacional tem um valor que não está incluído no intervalo de confiança.

O PODER DE UM TESTE

- Usamos β para designar a probabilidade de deixar de rejeitar uma hipótese nula falsa (**erro tipo II**).
- **Poder de um teste** de hipótese é a probabilidade $(1-\beta)$ de se rejeitar uma hipótese nula falsa.
 - Essa probabilidade é calculada usando um **nível de significância** específico (α) e um valor particular do parâmetro populacional que seja uma alternativa (H_1) ao valor assumido na hipótese nula (H_0).
- O **poder de um teste** de hipótese é a probabilidade de se apoiar uma hipótese alternativa (H_1) verdadeira.
- **Dependendo dos valores** particulares escolhidos como alternativos à hipótese nula, poder do teste será diferente.
- Geralmente é exigido poder de teste entre 0,8 e 0,9.

TESTE DE UMA AFIRMATIVA SOBRE UMA PROPORÇÃO

REQUISITOS PARA PROPORÇÃO POPULACIONAL

- Requisitos para testar afirmativas sobre uma proporção populacional p :
- Amostra aleatória simples.
- Distribuição binomial satisfeita (número fixo de tentativas independentes tendo probabilidades constantes; duas categorias de resultados).
- Distribuição binomial das proporções amostrais pode ser aproximada por uma distribuição normal ($np \geq 5$ e $nq \geq 5$).

PROPORÇÃO POPULACIONAL

– Notação:

- n = tamanho da amostra ou número de tentativas
- p -chapéu = x / n (proporção amostral)
- p = proporção populacional (usada na hipótese nula)
- $q = 1 - p$

– Estatística de teste para testar uma afirmativa sobre a proporção populacional:

- Valores P : distribuição normal padrão
- Valores críticos: distribuição normal padrão
- Estatística de teste:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

**TESTE DE UMA AFIRMATIVA SOBRE UMA MÉDIA:
 σ CONHECIDO**

REQUISITOS PARA MÉDIA POPULACIONAL COM σ CONHECIDO

- Requisitos para testar afirmativas sobre uma média populacional com σ conhecido:
- Amostra aleatória simples.
- Valor do desvio padrão populacional σ é conhecido.
- População é normalmente distribuída e/ou $n > 30$.

MÉDIA POPULACIONAL COM σ CONHECIDO

– Notação:

- n = tamanho da amostra
- \bar{x} = média amostral
- μ = média populacional (usada na hipótese nula)
- σ = desvio padrão populacional conhecido

– **Estatística de teste** para testar uma afirmativa sobre a média populacional com σ conhecido:

- Valores P : distribuição normal padrão
- Valores críticos: distribuição normal padrão
- Estatística de teste:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

**TESTE DE UMA AFIRMATIVA SOBRE UMA MÉDIA:
 σ DESCONHECIDO**

REQUISITOS PARA MÉDIA POPULACIONAL COM σ DESCONHECIDO

- Requisitos para testar afirmativas sobre uma média populacional com σ desconhecido:
 - Amostra aleatória simples.
 - Valor do desvio padrão populacional σ não é conhecido.
 - População é normalmente distribuída e/ou $n > 30$.

MÉDIA POPULACIONAL COM σ DESCONHECIDO

– Notação:

- n = tamanho da amostra
- \bar{x} = média amostral
- μ = média populacional (usada na hipótese nula)
- s = desvio padrão da amostra

– Estatística de teste para testar uma afirmativa sobre a média populacional com σ desconhecido:

- Valores P : distribuição t de Student, com $(n-1)$ graus de liberdade (gl).

- Valores críticos: distribuição t de Student, com $(n-1)$ graus de liberdade (gl)

- Estatística de teste:
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

TESTE DE UMA AFIRMATIVA SOBRE UM DESVIO PADRÃO OU UMA VARIÂNCIA

REQUISITOS PARA DESVIO PADRÃO OU VARIÂNCIA

- Requisitos para testar afirmativas sobre um desvio padrão ou uma variância:
- Amostra aleatória simples.
- População é normalmente distribuída (exigência mais estrita do que a exigência de normalidade para médias).

DESVIO PADRÃO OU VARIÂNCIA

– Notação:

- n = tamanho da amostra
- s^2 = variância amostral
- σ^2 = variância populacional (usada na hipótese nula)

– Estatística de teste para testar uma afirmativa sobre o desvio padrão ou variância populacional:

- Valores P : distribuição qui-quadrado, com $(n-1)$ graus de liberdade (gl).
- Valores críticos: distribuição qui-quadrado, com $(n-1)$ graus de liberdade (gl).
- Estatística de teste:

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma^2}$$