

AULA 02

Análise de Regressão Múltipla: Estimação

Ernesto F. L. Amaral

12 de julho de 2011

Análise de Regressão Linear e Análise de Dados Categóricos (MQ 2011)

Fonte:

Cohen, Ernesto, e Rolando Franco. 2000. “Avaliação de Projetos Sociais”. São Paulo, SP: Editora Vozes. pp.118-136.

Wooldridge, Jeffrey M. “Introdução à econometria: uma abordagem moderna”. São Paulo: Cengage Learning, 2008. Capítulo 3 (pp.64-109).

CAPÍTULO 7 - COHEN & FRANCO

MODELOS PARA A AVALIAÇÃO DE IMPACTOS

DESENHO DE PESQUISA DE AVALIAÇÃO DE IMPACTO

- Os métodos de estimação de impacto dependem do desenho da avaliação, isto é, se há dados para grupos de tratamento (beneficiários) e controle (comparação).

GRUPO	ANTES	POLÍTICA	DEPOIS
Tratamento	T_0	X	T_1
Controle	C_0		C_1

- “Diferença em diferenças” ou “dupla diferença” (DD) estima:
 - 1) Diferença dentro de cada grupo (tratamento e controle).
 - 2) Diferença dessas duas médias.

$$DD = (T_1 - T_0) - (C_1 - C_0)$$

DESENHOS EXPERIMENTAIS

- Atribuição aleatória, dentre determinados grupos, da oportunidade de participar em programas, definindo grupos de tratamento e controle:
 - Por exemplo, realização de pesquisa para averiguar as regiões pobres.
 - Seleção aleatória de regiões incluídas na política e daquelas que serão o controle.
 - Única diferença entre grupos é o ingresso no programa.
- Avaliação sistemática e mensuração dos resultados em distintos momentos da implementação do programa.
- Se a seleção é aleatória, pode-se dispensar a avaliação anterior à política para ambos os grupos.

	X	T₁
		C₁

DESENHOS QUASE-EXPERIMENTAIS

- O controle é construído com base na propensão do indivíduo de ingressar no programa.
- Busca-se obter grupo de comparação que corresponda ao grupo de beneficiários:
 - Com base em certas características (sociais, econômicas...) estima-se a probabilidade de um indivíduo de participar do programa.
 - Com base nessa propensão (exercício de emparelhamento), constitui-se o grupo de controle.
- Estima-se os efeitos na comparação entre o grupo de tratamento e o grupo de controle, antes e depois do programa.

T_0	X	T_1
C_0		C_1

DESENHOS NÃO-EXPERIMENTAIS

- Ausência de grupos de controle torna mais difícil isolar causas que geram impactos na variável de interesse.
- Pode ser realizada análise reflexiva para estimar efeitos dos programas, com comparação dos resultados obtidos pelos beneficiários antes e depois do programa.
- Modelo antes-depois:

T_0	X	T_1

- Modelo somente depois com grupo de comparação:

	X	T_1	T_2
		C_1	C_2

- Modelo somente depois:

	X	T_1	T_2

DESENHO DA AVALIAÇÃO	MÉTODO DE ESTIMAÇÃO DE IMPACTO
EXPERIMENTAL	COMPARAÇÃO DE MÉDIAS
QUASE-EXPERIMENTAL	REGRESSÃO MÚLTIPLA & DIFERENÇA EM DIFERENÇAS
NÃO-EXPERIMENTAL	REGRESSÃO MÚLTIPLA

CAPÍTULO 3 - WOOLDRIDGE
ANÁLISE DE REGRESSÃO MÚLTIPLA:
ESTIMAÇÃO

MODELO DE REGRESSÃO MÚLTIPLA

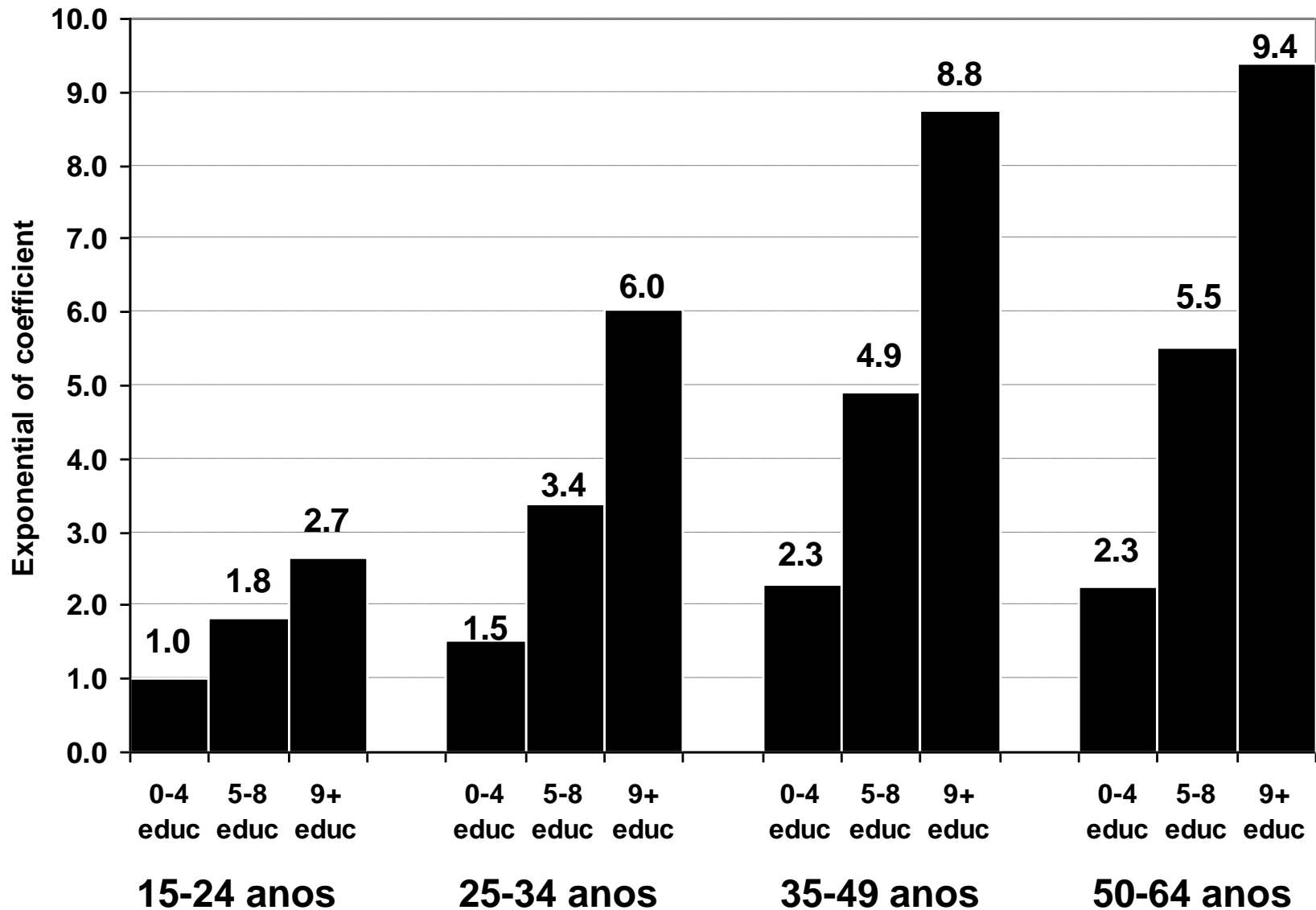
- A desvantagem de usar análise de **regressão simples** é o fato de ser difícil que todos os outros fatores que afetam y não estejam correlacionados com x .
- Análise de **regressão múltipla** possibilita *ceteris paribus* (outros fatores constantes), pois permite controlar muitos outros fatores que afetam a variável dependente simultaneamente.
- Isso auxilia no teste de teorias e hipóteses, quando possuímos dados não-experimentais.
- Ao utilizar mais fatores na explicação de y , uma maior variação de y será explicada pelo modelo.
- Este é o modelo mais utilizado nas ciências sociais.
- O método de MQO é usado para estimar os parâmetros do modelo de regressão múltipla.

MODELO COM DUAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES

$$\text{salário}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{educ} + \beta_2 \text{exper} + u$$

- Salário é determinado por educação, experiência e outros fatores não-observáveis (Equação Minceriana).
- β_1 mede o efeito de educação sobre salário, mantendo todos os outros fatores fixos (*ceteris paribus*).
- β_2 mede o efeito de experiência sobre salário, mantendo todos os outros fatores fixos.
- Como experiência foi inserida na equação, podemos medir o efeito de educação sobre salário, mantendo experiência fixa.
- Na regressão simples, teríamos que assumir que experiência não é correlacionada com educação, o que é uma hipótese fraca.

EFEITOS DE GRUPOS DE IDADE-ESCOLARIDADE NA RENDA DOS TRABALHADORES: BRASIL, 1970



Fonte: Censos Demográficos Brasileiros 1970 a 2000 (IBGE).

MODELO GERAL DE DUAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

- β_0 é o intercepto.
- β_1 mede a variação em y com relação a x_1 , mantendo os outros fatores constantes.
- β_2 mede a variação em y com relação a x_2 , mantendo os outros fatores constantes.

RELAÇÕES FUNCIONAIS ENTRE VARIÁVEIS

- A regressão múltipla é útil para generalizar relações funcionais entre variáveis.
- Por exemplo:

$$cons = \beta_0 + \beta_1 rend + \beta_2 rend^2 + u$$

- Variação no consumo decorrente de variação na renda é:

$$\frac{\Delta cons}{\Delta rend} \approx \beta_1 + 2\beta_2 rend$$

- O efeito marginal da renda sobre o consumo depende tanto de β_2 como de β_1 e do nível de renda.
- A definição das variáveis independentes é sempre importante na interpretação dos parâmetros.

HIPÓTESE SOBRE u EM RELAÇÃO A x_1 E x_2

$$E(u/x_1, x_2)=0$$

- Para qualquer valor de x_1 e x_2 na população, o fator não-observável médio é igual a zero.
- Isso implica que outros fatores que afetam y não estão, em média, relacionados com as variáveis explicativas.
- Os níveis médios dos fatores não-observáveis devem ser os mesmos nas combinações das variáveis independentes.
- A esperança igual a zero significa que a relação funcional entre as variáveis explicada e as explicativas está correta.
- No exemplo da renda ao quadrado, não é preciso incluir $rend^2$, já que ela é conhecida quando se conhece $rend$:

$$E(u/rend)=0$$

MODELO COM k VARIÁVEIS INDEPENDENTES

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

- Esse é o modelo de regressão linear múltipla geral ou, simplesmente, modelo de regressão múltipla.
- Há $k + 1$ parâmetros populacionais desconhecidos, já que temos k variáveis independentes e um intercepto.
- Os parâmetros β_1 a β_k são chamados de parâmetros de inclinação, mesmo que eles não tenham exatamente este significado.
- **A regressão é “linear” porque é linear nos β_j , mesmo que seja uma relação não-linear entre a variável dependente e as variáveis independentes:**

$$y = \beta_0 + \beta_1 \log(x_1) + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + u$$

OBTENÇÃO DAS ESTIMATIVAS DE MQO

- Reta de regressão de MQO ou função de regressão amostral (FRA):

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_k x_k$$

- O método de mínimos quadrados ordinários escolhe as estimativas que minimizam a soma dos resíduos quadrados.
- Dadas n observações de y , x_1 , x_2 , ... e x_k , as estimativas dos parâmetros são escolhidas para fazer com que a expressão abaixo tenha o menor valor possível:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik})^2$$

INTERPRETAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REGRESSÃO

- Novamente a reta de regressão de MQO:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k + u$$

- O intercepto é o valor previsto de y quando todas as variáveis independentes são iguais a zero.
- As estimativas dos demais parâmetros têm interpretações de efeito parcial (*ceteris paribus*).
- Da equação acima, temos:

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1 + \hat{\beta}_2 \Delta x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k \Delta x_k$$

- O coeficiente de x_1 mede a variação em y devido a um aumento de uma unidade em x_1 , mantendo todas as outras variáveis independentes constantes:

$$\Delta \hat{y} = \hat{\beta}_1 \Delta x_1, \text{ sendo: } \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_k = 0$$

SIGNIFICADO DE “MANTER OUTROS FATORES FIXOS”

- Regressão múltipla permite interpretação *ceteris paribus* mesmo que dados não sejam coletados de maneira *ceteris paribus*.
- Os dados são coletados por amostra aleatória que não estabelece restrições sobre os valores a serem obtidos das variáveis independentes.
- Ou seja, a regressão múltipla permite simular situação de outros fatores constantes, sem restringir a coleta de dados.
- Essa modelagem permite realizar em ambientes não-experimentais o que cientistas naturais realizam em experimentos de laboratório (mantendo outros fatores fixos).
- A **avaliação de impacto de políticas** pode ser realizada com regressão múltipla, mensurando relação entre variáveis independentes e dependente, com noção de *ceteris paribus*.

COMPARAÇÃO DAS ESTIMATIVAS

- Relação entre parâmetros da regressão simples e múltipla.
- Tomemos como exemplo de regressão simples:

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1$$

- ... e de regressão múltipla:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2$$

- Relação entre os β_1 :

$$\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \tilde{\delta}_1$$

- $\tilde{\delta}_1$: coeficiente de inclinação da regressão de x_{i2} sobre x_{i1} .
- Os parâmetros são iguais ($\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1$), quando:

- 1) Efeito parcial de x_2 sobre y estimado é zero na amostra:

$$\hat{\beta}_2 = 0$$

- 2) x_1 e x_2 são não-correlacionados na amostra:

$$\tilde{\delta}_1 = 0$$

GRAU DE AJUSTE

- O R^2 nunca diminui quando outra variável independente é adicionada na regressão.
- Isso ocorre porque a soma dos resíduos quadrados nunca aumenta quando variáveis explicativas são acrescentadas ao modelo.
- Essa característica faz de R^2 um teste fraco para decidir pela inclusão de variáveis no modelo.
- O efeito parcial da variável independente (β_k) sobre y é o que deve definir se a variável deve ser inserida no modelo.
- R^2 é um grau de ajuste geral do modelo, assim como um teste para indicar o quanto um grupo de variáveis explica variações em y .

REGRESSÃO ATRAVÉS DA ORIGEM

- Em alguns modelos, pode-se avaliar que o ideal seria ter β_0 igual a zero:

$$\tilde{y} = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \cdots + \tilde{\beta}_k x_k$$

- R^2 pode ser negativo, o que significa que a média amostral de y “explica” mais da variação em y_i do que as variáveis independentes.
- Nesse caso, devemos incluir um intercepto ou procurar novas variáveis explicativas.
- Se β_0 for diferente de zero na população, a regressão através da origem gera estimadores dos parâmetros de inclinação (β_k) viesados.
- Se β_0 for igual a zero na população, a regressão com intercepto gera maiores variâncias dos estimadores de inclinação.

VALOR ESPERADOS DOS ESTIMADORES DE MQO

HIPÓTESE RLM.1 (LINEAR NOS PARÂMETROS)

- Modelo na população pode ser escrito como:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

- $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ são parâmetros desconhecidos (constantes) de interesse, e u é um erro aleatório não-observável ou um termo de perturbação aleatória.

HIPÓTESE RLM.2 (AMOSTRAGEM ALEATÓRIA)

- Temos uma amostra aleatória de n observações do modelo populacional acima.

HIPÓTESE RLM.3 (MÉDIA CONDICIONAL ZERO)

- O erro u tem um valor esperado igual a zero, dados quaisquer valores das variáveis independentes:

$$E(u|x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

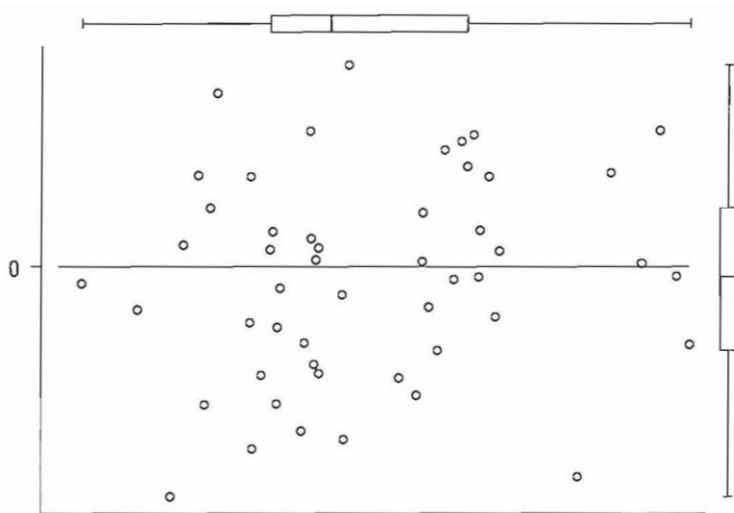
HIPÓTESE RLM.4 (COLINEARIDADE NÃO PERFEITA)

- Na amostra e na população, nenhuma das variáveis independentes é constante, e não há relações lineares exatas entre as variáveis independentes.
- As variáveis independentes devem ser correlacionadas entre si, mas não deve haver **colinearidade perfeita** (por exemplo, uma variável não pode ser múltiplo de outra).
- Altos graus de correlação entre variáveis independentes e tamanho pequeno da amostra aumentam variância de beta.
- Correlação alta (mas não perfeita) entre duas ou mais variáveis não é desejável (**multicolinearidade**).
- Por outro lado, **se a correlação for nula**, não é necessário regressão múltipla, mas sim regressão simples, já que o termo de erro englobaria todos fatores não-observáveis e não-relacionados com as variáveis independentes.

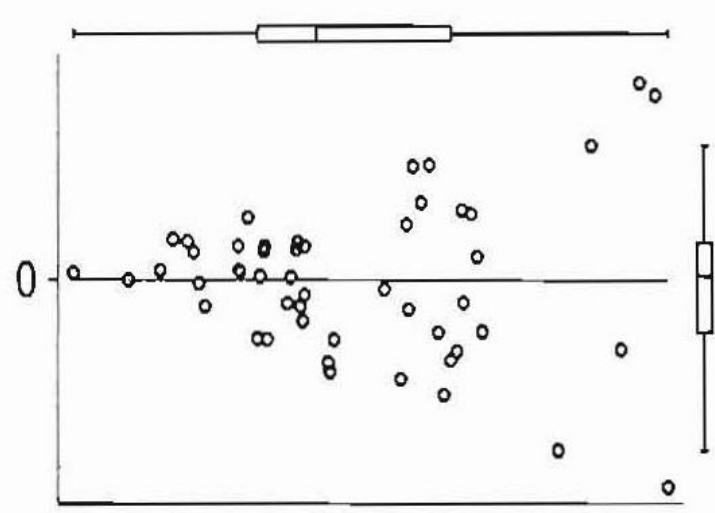
HIPÓTESE RLM.5 (HOMOSCEDASTICIDADE)

- A variância do termo erro (u), condicionada às variáveis explicativas, é a mesma para todas as combinações de resultados das variáveis explicativas.
- Se essa hipótese é violada, o modelo exibe heteroscedasticidade.

HOMOSCEDASTICIDADE



HETEROSCEDASTICIDADE



Fonte: Hamilton, 1992: 52-53.

TEOREMA DE GAUSS-MARKOV

- Sob as hipóteses RLM.1 a RLM.5, os parâmetros estimados do intercepto e de inclinação são os melhores estimadores lineares não-viesados dos parâmetros populacionais:

Best Linear Unbiased Estimators (BLUEs)

- Em outras palavras, os estimadores de mínimos quadrados ordinários (MQO) são os melhores estimadores lineares não-viesados.