AULA 8
Experimentos multinomiais e tabelas de contingência

Ernesto F. L. Amaral

05 de outubro de 2013

Centro de Pesquisas Quantitativas em Ciências Sociais (CPEQS)
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas (FAFICH)
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Fonte:
Triola, Mario F. 2008. “Introdução à estatística”. 10 ª ed. Rio de Janeiro: LTC. Capítulo 11 (pp.468-505).

ESQUEMA DA AULA

– Experimentos multinomiais: aderência.

– Tabelas de contingência: independência e homogeneidade.

VISÃO GERAL

– Tratar de dados categóricos (ou qualitativos ou de atributo) que podem ser separados em diferentes células.

– **Objetivo** é testar afirmativas sobre dados categóricos que consistem em contagem de freqüências para as categorias:

  – **Experimentos multinomiais:** contagens de freqüências observadas, arranjadas em uma única linha ou coluna (tabela de freqüência de entrada única) para verificar se tais contagens seguem alguma distribuição alegada.

  – **Tabelas de contingência:** contagens de freqüência arranjadas em uma tabela com, no mínimo, 2 linhas e 2 colunas.

  – **Tabelas de dupla entrada** que envolvem dados emparelhados.

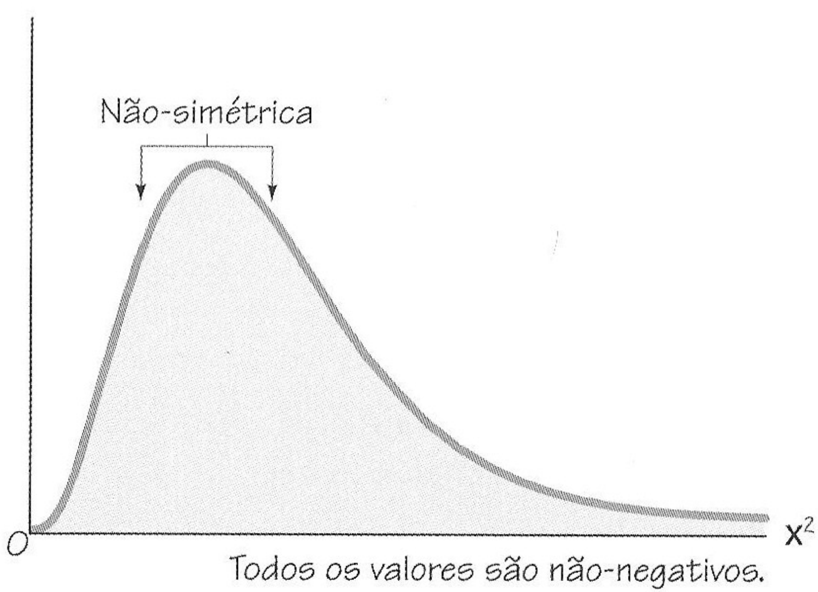
DISTRIBUIÇÃO DE QUI-QUADRADO

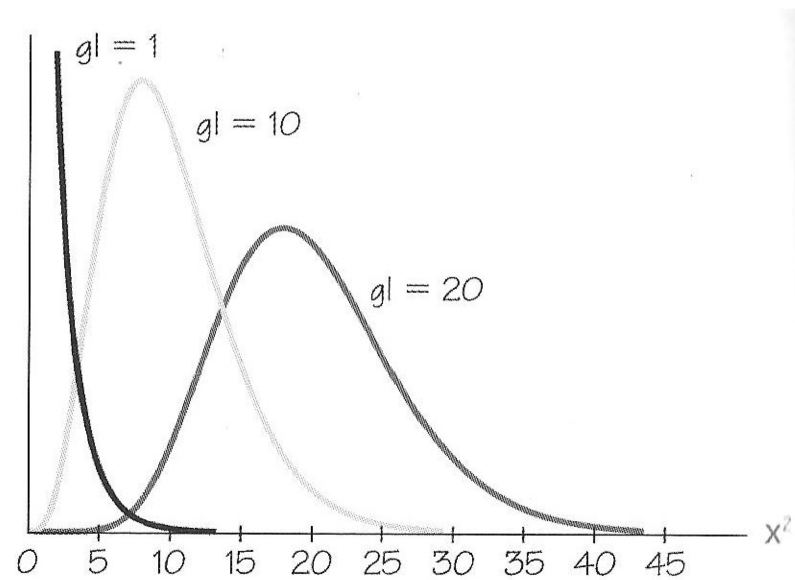
– É utilizada a distribuição de qui-quadrado que possui as seguintes propriedades:

– Não é simétrica.

– Valores da distribuição podem ser 0 ou positivos, mas não podem ser negativos.

– É diferente para cada número de graus de liberdade.





EXPERIMENTOS MULTINOMIAIS: ADERÊNCIA

TESTE DE HIPÓTESE

– O teste de hipótese usará a distribuição qui-quadrado com as contagens de freqüências observadas e as contagens de freqüências esperadas.

– Ou seja, a estatística de teste qui-quadrado é uma medida de discrepância entre as freqüências observadas e esperadas.

– O experimento multinomial possui mais de duas categorias, enquanto o experimento binomial tem exatamente duas categorias.

EXPERIMENTO MULTINOMIAL

– Este experimento satisfaz as seguintes condições:

  – Número de tentativas é fixo.

  – Tentativas são independentes.

  – Todos resultados de cada tentativa devem ser classificados em exatamente uma das várias diferentes categorias.

  – Probabilidades para diferentes categorias permanecem constantes para cada tentativa.

– É testada afirmativa de que freqüências observadas nas diferentes categorias se ajustam a uma distribuição alegada.

TESTE DE ADERÊNCIA

– O teste de aderência (bondade de ajuste) é usado para testar a hipótese de que uma distribuição de freqüência observada se ajusta (ou concorda com) alguma distribuição teórica especificada.

– Notação:

- – ***O***: freqüência observada de um resultado.
- – ***E***: freqüência esperada de um resultado.
- – ***k***: número de diferentes categorias ou resultados.
- – ***n***: número de tentativas total.

ENCONTRANDO FREQÜÊNCIAS ESPERADAS

– Se todas freqüências esperadas **são iguais**:

  – Então cada freqüência esperada é a soma de todas freqüências observadas dividida pelo número de categorias.

  – $E=n/k$.

– Se as freqüências esperadas **não são todas iguais**:

  – Então cada freqüência esperada é encontrada multiplicando-se a soma de todas freqüências observadas pela probabilidade da categoria.

  – $E=np$ para cada categoria.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

– **Freqüências observadas** têm que ser números inteiros (contagens reais), mas **freqüências esperadas** não precisam ser números inteiros.

– **Freqüências amostrais** comumente se desviam um pouco dos valores teoricamente esperados.

– Devemos testar se as diferenças entre os valores reais observados (***O***) e os valores teoricamente esperados (***E***) são estatisticamente significativos.

REQUISITOS PARA TESTE DE DIFERENÇAS

– Dados selecionados aleatoriamente.

– Dados amostrais consistem em contagens de freqüências para cada uma das diferentes categorias.

– Para cada categoria, freqüência esperada é, no mínimo, 5.

– Valores críticos são encontrados usando-se graus de liberdade (*k*–1) específicos, sendo *k* o número de categorias.

– Estes testes são sempre unilaterais à direita.

– Estatística de teste para testes de aderência em experimentos multinomiais:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

RESULTADOS DA ESTATÍSTICA DE TESTE

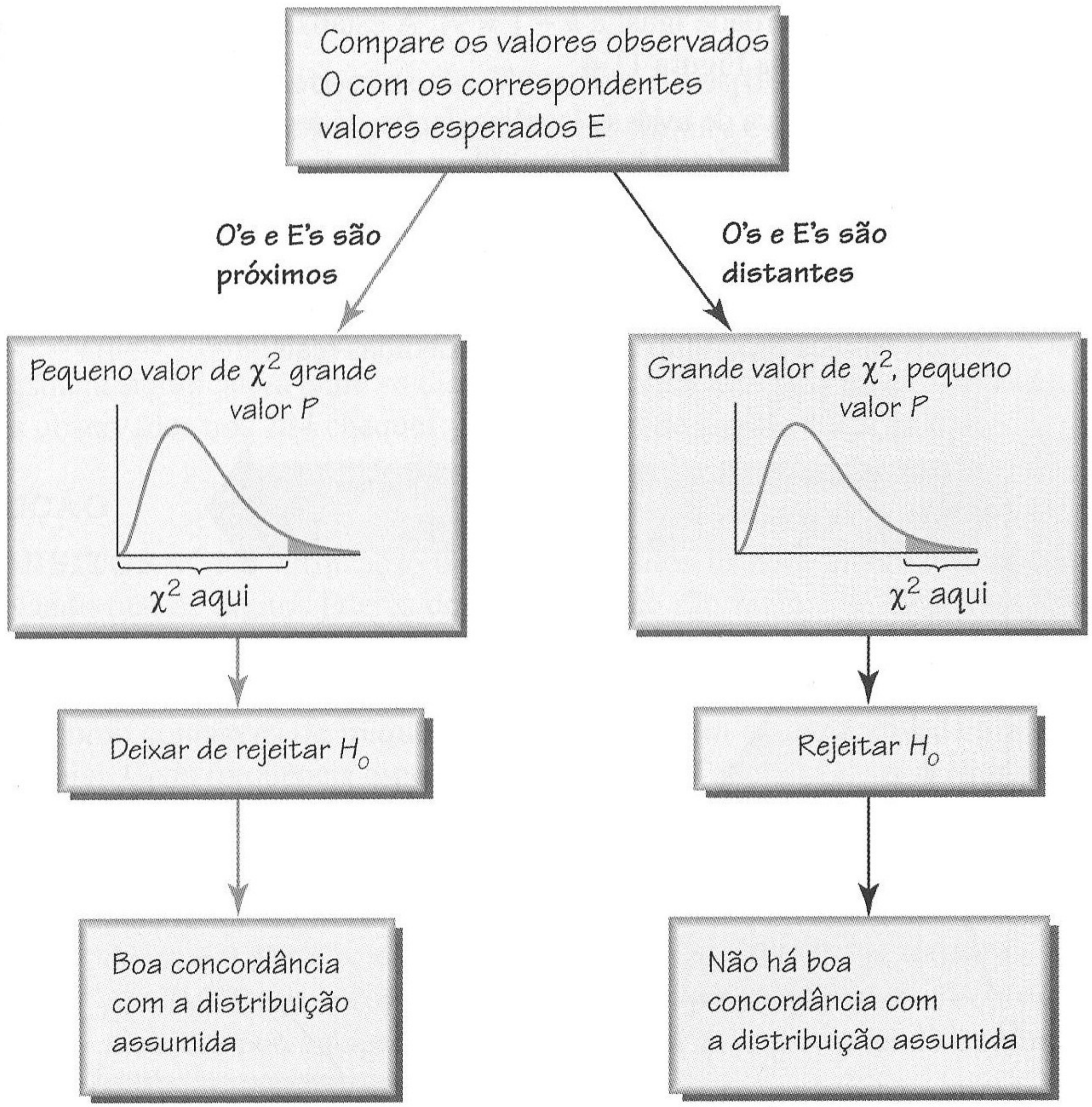
– A estatística de teste χ^2 se baseia nas diferenças entre valores observados e esperados.

– Uma concordância entre valores observados e esperados levará a um pequeno valor de χ^2 e a um grande valor *P*.

– Uma discrepância entre valores observados e esperados levará a um grande valor de χ^2 e a um pequeno valor *P*.

– O valor crítico e a região crítica se localizam no extremo direito da distribuição (unilateral à direita).

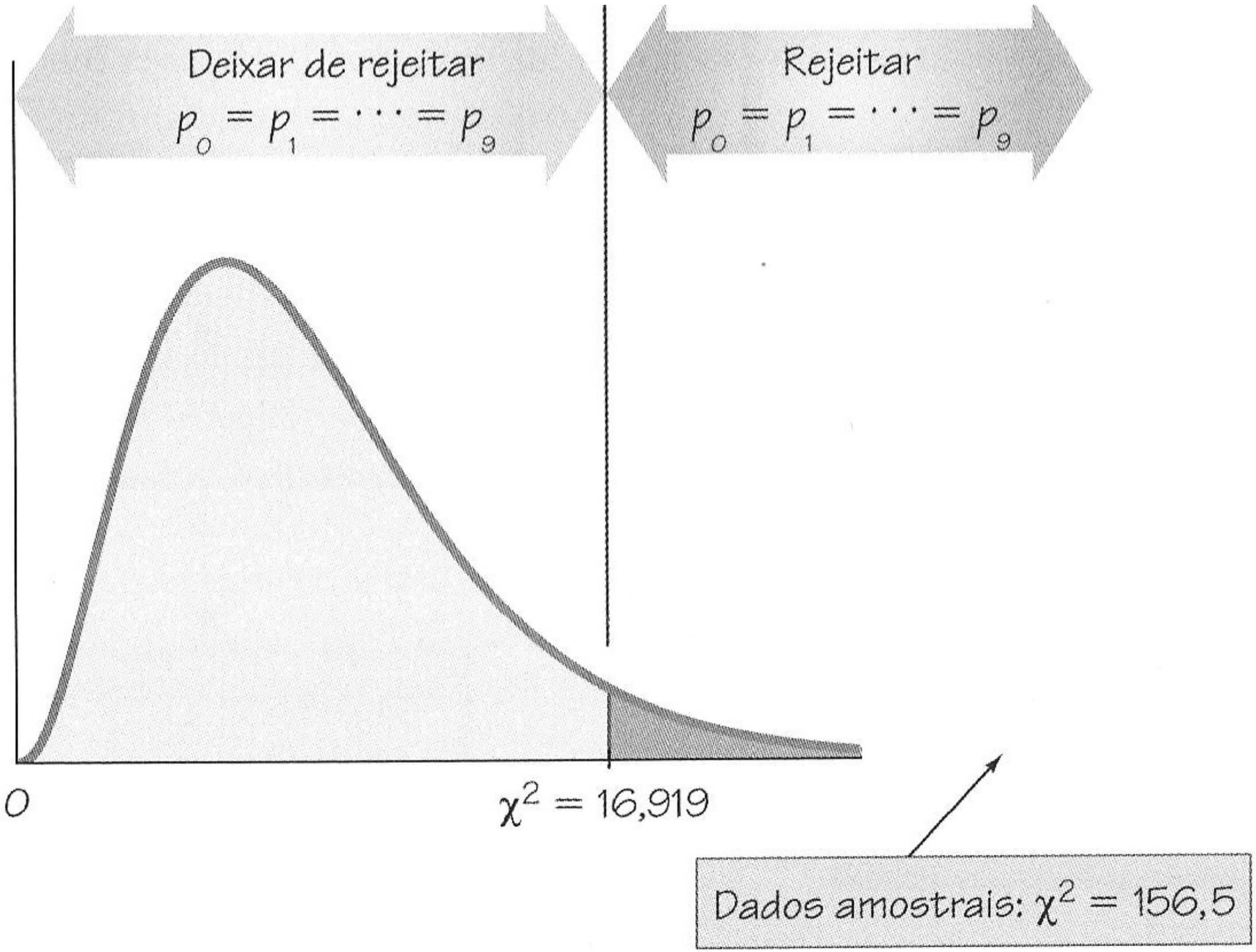
RELAÇÕES ENTRE χ^2, VALOR *P* E ADERÊNCIA



EX.: TESTE DE $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = p_9$

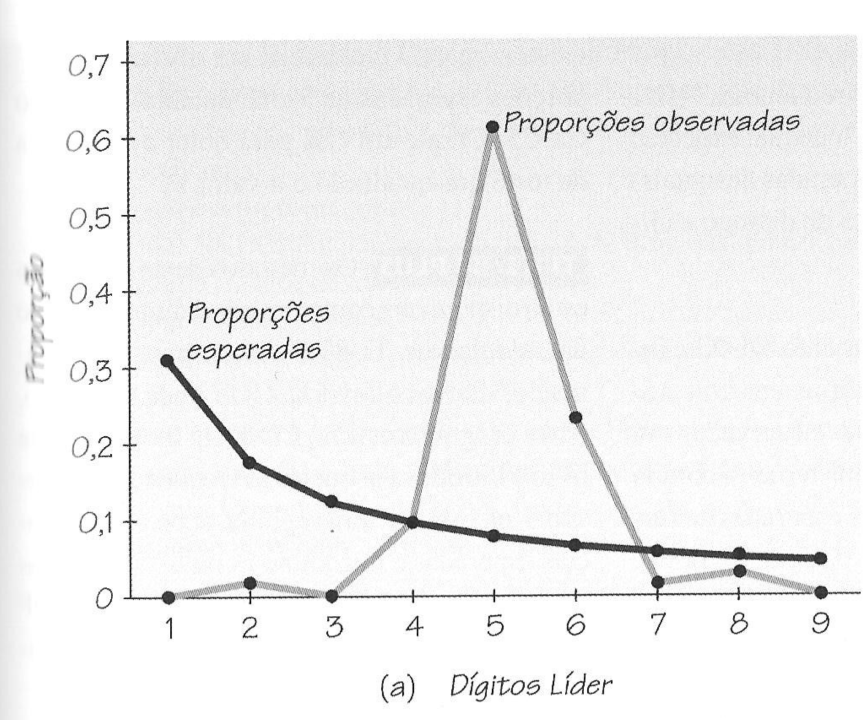
– Ho: frequências relativas (probs.) de 10 células são iguais.

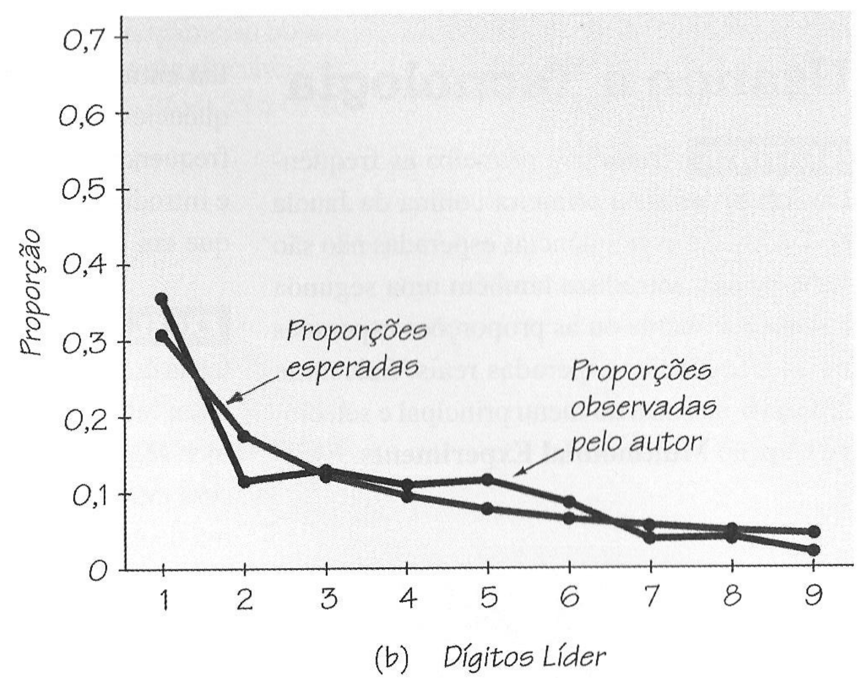
– Graus de liberdade: $k - 1 = 10 - 1 = 9$



EX.: COMPARAÇÃO DE FREQÜÊNCIAS

– Gráficos como este abaixo são úteis na comparação visual de freqüências esperadas e observadas, bem como na sugestão de quais categorias resultam principais diferenças.





VALORES *P*

– A abordagem do valor *P* também pode ser usada.

– Os valores *P* são fornecidos automaticamente por programas estatísticos.

FUNDAMENTOS PARA ESTATÍSTICA DE TESTE

– Mede-se diferença de freqüências observadas e esperadas.

– **Simples soma** das diferenças entre valores observados e esperados não é eficaz, porque soma é sempre zero.

– **Elevação ao quadrado** dos valores de (O–E) fornece uma estatística melhor (como no caso do desvio padrão).

– $\boldsymbol{\sum(O-E)^2}$ mede a magnitude das diferenças.

– $\boldsymbol{\sum(O-E)^2/E}$ mede magnitude das diferenças em relação ao esperado. Distribuição pode ser aproximada pela distribuição χ^2 que é contínua.

– **Graus de liberdade** indicam número de categorias que podemos inferir freqüências, antes que estas sejam determinadas para todas categorias.

TABELAS DE CONTINGÊNCIA: INDEPENDÊNCIA E HOMOGENEIDADE

TABELAS DE CONTINGÊNCIA

– **Tabela de contingência** (ou tabela de freqüência de dupla entrada) é uma tabela na qual as freqüências correspondem a duas variáveis (linhas e colunas).

– Estas tabelas incluem contagens de freqüência para dados categóricos arranjados em uma tabela com pelo menos 2 linhas e 2 colunas.

– **Testes de independência** são usados para determinar se uma variável linha de uma tabela de contingência é independente de sua variável coluna.

– **Testes de homogeneidade** são usados para determinar se populações diferentes têm as mesmas proporções de alguma característica.

TESTE DE INDEPENDÊNCIA

– Um **teste de independência** testa a hipótese nula de que não há associação entre a variável linha e a variável coluna em uma tabela de contingência.

– **Hipótese nula:** variáveis linha e coluna são independentes.

REQUISITOS

– Dados amostrais são selecionados aleatoriamente e são representados como contagens de freqüências em tabela de dupla entrada.

– **Hipótese nula** (H_0) é a afirmativa de que variáveis linha e coluna são **independentes**.

– **Hipótese alternativa** (H_1) é a afirmativa de que as variáveis linha e coluna são **dependentes**.

– Em toda célula da tabela, a freqüência esperada (E) é no mínimo 5.

– Não há exigência quanto à freqüência observada (O).

– Não há exigência de que população deva ter distribuição normal ou qualquer outra.

ESTATÍSTICA DE TESTE

– Estatística de teste para um teste de independência:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

– Permite medir grau de discordância entre freqüências observadas e as teoricamente esperadas, quando as duas variáveis são independentes.

– Grandes valores da estatística de teste refletem diferenças significativas entre as freqüências observadas e esperadas.

VALORES CRÍTICOS

– **Valores críticos** são encontrados com graus de liberdade [(*r*–1)(*c*–1)], em que *r* é o número de linhas e *c* é o número de colunas.

– Ao saber total de todas freqüências, podemos **associar livremente** freqüências a apenas *r*–1 linhas e a *c*–1 colunas, antes que as freqüências de todas células sejam determinadas.

– Porém, não podemos ter freqüências negativas ou freqüências tão grandes que a soma de qualquer linha (ou coluna) exceda total das freqüências observadas.

– Em um teste de independência com uma tabela de contingência, a região crítica se localiza apenas na **cauda direita**.

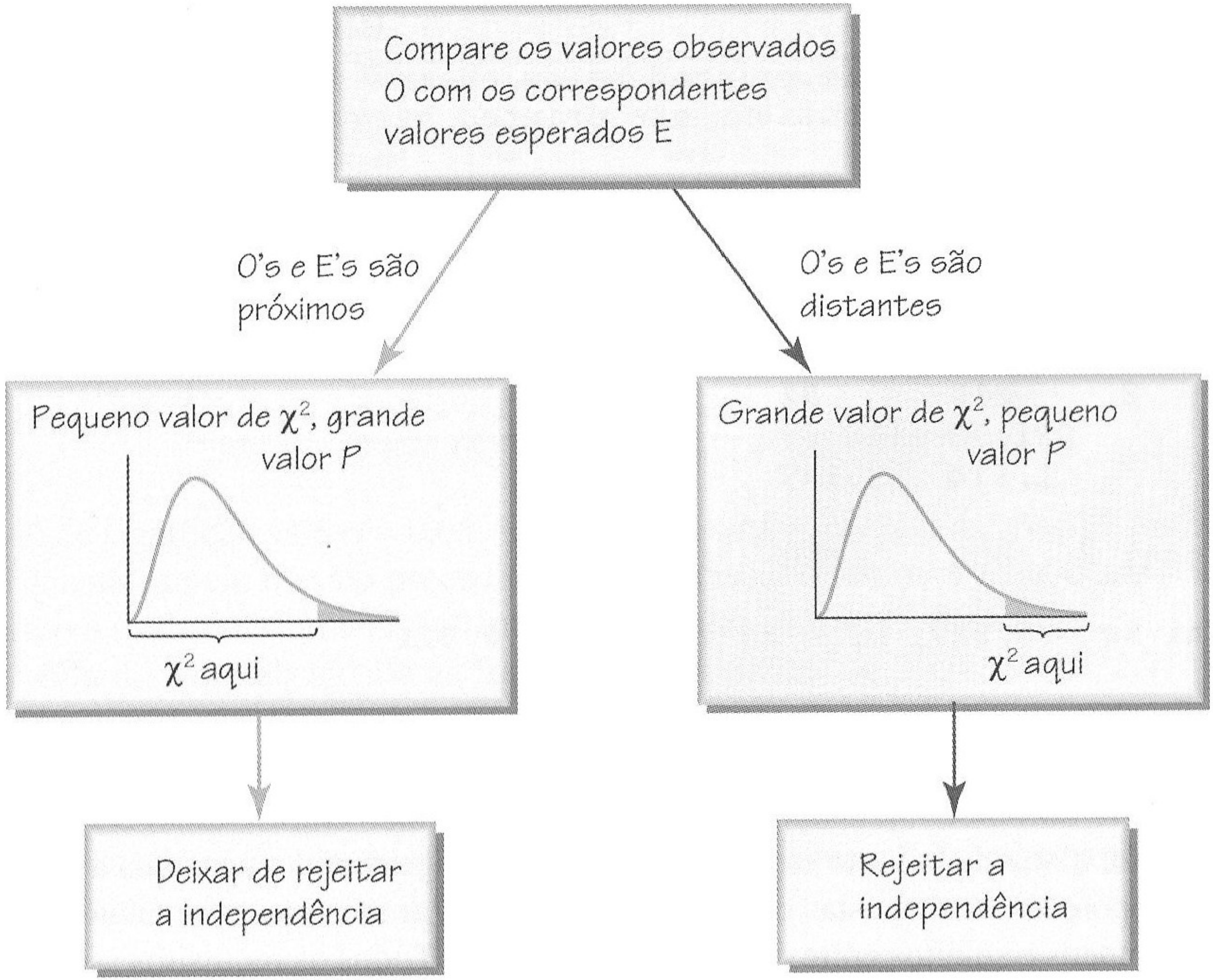
FREQÜÊNCIA ESPERADA PARA UMA CÉLULA

– Freqüência esperada (*E*) pode ser calculada para cada célula:
  – Multiplicando-se o total das freqüências das linhas pelo total das freqüências das colunas.
  – Dividindo-se o resultado pelo grande total das freqüências.

$$freqüência\ esperada = (total\ geral) * \frac{(total\ da\ linha)}{(total\ geral)} * \frac{(total\ da\ coluna)}{(total\ geral)}$$

$$E = freqüência\ esperada = \frac{(total\ da\ linha) * (total\ da\ coluna)}{(total\ geral)}$$

COMPONENTES-CHAVE NO TESTE DE INDEPENDÊNCIA



TESTE DE HOMOGENEIDADE

– Amostras podem ser extraídas de **populações diferentes** e desejamos determinar se essas populações têm as mesmas proporções da característica em consideração.

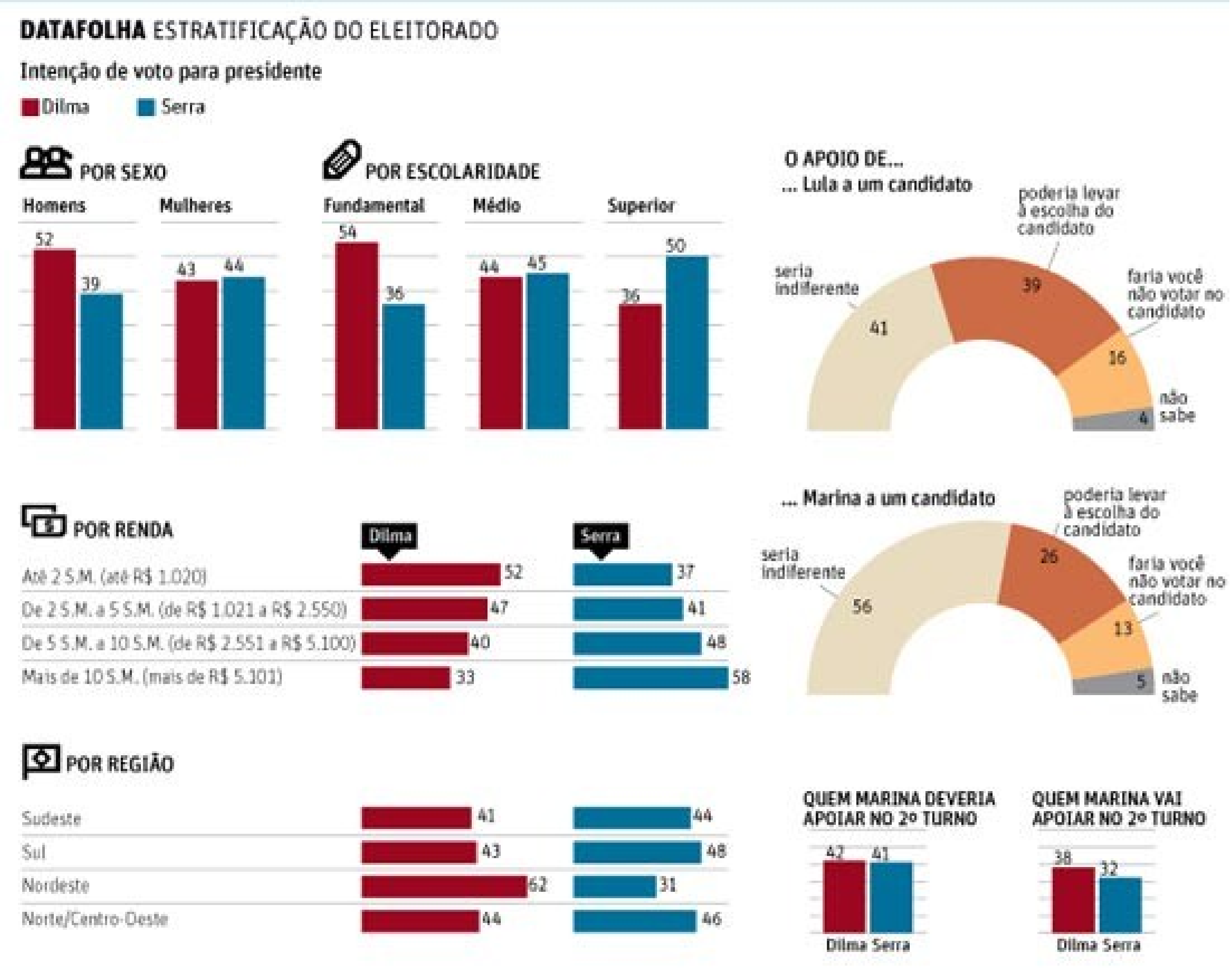
– Em um **teste de homogeneidade**, testamos a afirmativa de que populações diferentes têm a mesma proporção de alguma característica.

– Ao realizar um teste de homogeneidade, podemos usar **mesmos** requisitos, estatística de teste, valor crítico e demais procedimentos já apresentados.

– **Exceção** é que em vez de testar a hipótese nula de independência entre as variáveis linha e coluna, testamos a hipótese nula de que as diferentes populações têm as mesmas proporções de alguma característica.

INTENÇÃO DE VOTO PARA PRESIDENTE

– Datafolha (10/10/2010), margem de erro (±2%):



Fonte: http://www1.folha.uol.com.br/poder/812469-nordeste-assegura-dianteira-de-dilma-no-2-turno.shtml

INTENÇÃO DE VOTO PARA PRESIDENTE (%)

– Valores observados:

Sexo	Dilma	Serra	Total
Homem	52	39	91
Mulher	43	44	87
Total	**95**	**83**	**178**

– Valores esperados:

Sexo	Dilma	Serra	Total
Homem	(95*91)/178= 48,57	(83*91)/178= 42,43	91
Mulher	(95*87)/178= 46,43	(83*87)/178= 40,57	87
Total	**95**	**83**	**178**

– $\chi^2 = (52-48{,}57)^2/48{,}57 + \ldots + (44-40{,}57)^2/40{,}57 \approx 1{,}063$

– $gl = (r-1)(c-1) = (2-1)(2-1) = 1$

– Tabela A-4 (pág.621): valor crítico = 3,841; $\alpha = 0{,}05$.

NO PROGRAMA ESTATÍSTICO

–Teste de qui-quadrado:

mulher	dilma 0	1	Total
0	39	52	91
1	44	43	87
Total	83	95	178

Pearson chi2(1) = 1.0645 Pr = 0.302

– **Hipótese nula (*H_0*)** é a afirmativa de que variáveis linha e coluna são **independentes**.

– **Hipótese alternativa (*H_1*)** é a afirmativa de que as variáveis linha e coluna são **dependentes**.

– Resultado indica que probabilidade de não rejeitar H_0 é muito grande (p=0,302). É maior que α = 0,05.

– Não há relação entre sexo do eleitor e escolha do candidato a presidente.